Programozási tételek specifikációja

Alapvető fogalmak:

H halmaz	tetszőleges (véges) halmaz a szokásos halmaz műveletekkel és konstanosokkal ($\in,\notin,\subset,\subseteq,\cup,\cap,\setminus,\varnothing$, Számosság)
$\mathbb{L}$	*logikai értékek* halmaza: {Igaz,Hamis} a szokásos műveletekkel ($\neg,\wedge,\vee,\Leftrightarrow,\Rightarrow$), kvantorokkal ($\forall,\exists$) és indivíduum változokkal, halmazokkal[1]
$\mathbb{N}$	*természetes számok* halmaza {0, 1, ...} a szokásos műveletekkel (+,-,*,Div,Mod)
$\mathbb{Z}$	*egész számok* halmaza {.., -1, 0, 1, ...} a szokásos műveletekkel (+,-,*,Div,Mod)
$\mathbb{R}$	*valós számok* halmaza a szokásos műveletekkel (+,-,*,/, ^)
$\mathbb{C}$	*karakterek* halmaza {…, ’ ’,…, ’A’,…,’z’, …}
$\mathbb{S}$	*szövegek* halmaza
H-Sorozat	H-beli elemek N-esek ($N\in\mathbb{N}$), amelyen alapműveletként értelmezzük az *i. elem* ($i\in\{1..N\}$) kiválasztását: s_i:= az S sorozat i. eleme, valamint az *eleme* relációt: $x\in S$, ha $\exists i$: $x=s_i$, és a *sorozathossz* függvényt, ekkor Hossz(S)=N
H^N halmaz $N\in\mathbb{N}$	H-beli N-*elemű sorozatok* halmaza
H^* halmaz	H-beli *véges sorozatok* halmaza, azaz $H^* = \cup_{(i=0..\infty)} H^i$
$()\in H^*$ *üres sorozat*	S=() $\Leftrightarrow$ Hossz(S)
[x..y][2] *index-intervallum* *x,y*$\in\mathbb{N}$	[x..y]:={x,x+1,...,y-1,y}
I[x..y] *index-sorozat*	I[x..y]:=(x,x+1,...,y-1,y)$\in\mathbb{N}^{y-x}$, ha $y\geq x$ I[x..y]:=(), egyébként
F(H,S) *függvényhalmaz*	*F*(H,S):={ f : f:H$\to$S }
$\leq_H\in$ *F*(HxH,$\mathbb{L}$) rendezés *rendezési reláció (infix jelölésű bináris függ.)* *ha lehet:* $\leq_H$ *helyett* $\leq$	ha $\forall a\in H$: $a\leq a$ (reflexív), $\forall a,b,c\in H$: $a\leq b$ és $b\leq c \Rightarrow a\leq c$ (tranzitív), $\forall a,b\in H$: $a\leq b$ és $b\leq a \Rightarrow a=b$ (antiszimmetrikus), $\forall a,b\in H$: $a\leq b$ vagy $b\leq a$ (teljes)
H halmaz *RendezettHalmaz$_\leq$(H)*	ha $\forall h,j\in H$: $h\leq j$ vagy $h\geq j$ (ha H véges $\Rightarrow \exists$max, min eleme)
$S\in H^*$ sorozat *RendezettSorozat$_\leq$(S)*	ha RendezettHalmaz(H) és $\forall i\in[1..N)$: $s_i\leq s_{i+1}$
$S\in H^*$ sorozat *HalmazFölsorolás(S)*	ha $\forall i,j\in[1..N]$: $i\neq j \Rightarrow s_i\neq s_j$
X&Y *konkatenációja* X és Y sorozatoknak	X&Y:=$(x_1,...,x_N,y_1,...,y_M)$, ahol N=Hossz(X) és M=Hossz(Y)
$X\subseteq Y$ X *részsorozata* Y-nak	$\forall x\in X$: $\exists y\in Y$: x=y és $i,j\in$[1..Hossz(X)]: $i<j$: $x_i,x_j\in X \Rightarrow$ $\exists k,l\in$[1..Hossz(Y)]: $k<l$: ($x_i=y_k$ és $x_j=y_l$)
R\r sorozat $r\in H$, $R\in H^N$: HalmazFölsorolás(R)	ha $r\in R \Rightarrow R\setminus r\in H^{N-1}$ és $R=R_1\&(r)\&R_2 \Rightarrow R\setminus r=R_1\&R_2$ ha $r\notin R \Rightarrow R\setminus r=R$

---

[1] Pl. „**$\exists i\in H$: T(i)**” logikai kifejezésben az i – individuumváltozó, a H – az individuumhalmaz. A kifejezést így értjük: „**létezik olyan H-beli i elem, amelyre teljesül a T predikátum**”.

[2] Helyenként ugyanilyen értelemben használjuk a [x,y] rövidebb jelölést. A balról/jobbról nyíltságra a hagyományos matematikai zárójeleket használjuk.

$\mathcal{P}(R)$ az $R \in H^N$ *Permutációhalmaza*	• $\mathcal{P}(R) := \{S \in H^N : N=1 \Rightarrow S=R,$ $N>1 \Rightarrow S=s\&S'$ és $s \in R$ és $S' \in \mathcal{P}(R \setminus s)\}$
X,Y a Z *felbontása* (X,Y,Z sorozatok)	• ha Z=X&Y
$T_i : H \to \mathbb{L}$ $i \in [1..K]$ H-*partícionálása*	• $\forall x \in H: \vee_{(i=1..K)} T_i(x)=$Igaz és $(T_i(x) \wedge T_j(x)=$Hamis $(i \neq j))$

Definíció: Az $F : H^* \to S^*$ feladat *elemenként feldolgozható*, $\forall x \in H^*$ $\forall \underline{\underline{x}}, \underline{x}$ x-felbontásra igaz, hogy $F(\underline{x}) \& F(\underline{\underline{x}}) = F(x)$.

Lemma: Ha az $F : H^* \to S^*$ feladat elemenként feldolgozható, akkor $\exists f : H \to S$ függvény, hogy $f(h_i)=s_i$ $i \in [1,N]$.

Tételek szerkezete: bemenet, kimenet, előfeltétel, utófeltétel

A függvényként (is) szerepeltetés célja, hogy már „ránézésre" is kitünjön, mely sémák (absztrakt algoritmusok) melyekkel kombinálódhatnak. Ez később nagy segítségünkre lesz a bonyolultabb feladatok megoldásánál.

Megállapodások:

- A tételeket mint *függvény*eket is megadjuk (a „fejsorban", az ún. szignatúrában), amelynek argumentuma tartalmazza azokat a „kellékeket", amelyek a szükséges bemenetei, ill. az értékét, amely halmazba képez. E jelölés célja, hogy pusztán ilyen „szintaktikai" természetû dolog is segítségünkre legyen majd a tételek összeépítésénél.
- Szívesebben adunk meg egy sorozatot H^*-beliként (H^N helyett), mivel a specifikációban legkevésbé így köti meg a kezünket (nem utal a leírás *tömb*re vagy más *fixhosszúságú szerkezet*re). Ekkor viszont a sorozat és hossza –mint rendszerint megjelenő bemeneti információ– „kapcsolat" nélkül marad; ezt a hiányzó információt kell beilleszteni az előfeltételbe. A „tétel-függvényben" éppen ezen megfontolásból nem tüntetjük föl a sorozatok elemszámát szimbolizáló paramétereket.

0. Másolás$\left(H^*,\mathit{F}(H,S)\right):S^*$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$
Ki: $Y\in S^*$

Ef: $Hossz(X)=N \wedge$ F *elemenként feldolgozható az* $f:H\to S$ *függvénnyel*
Uf: $\forall i\in[1,N]: y_i=f(x_i)$

1. Sorozatszámítás$\left(H^*,\mathit{F}(H^*,H)\right):H$ lehetne még **Sorozatszámítás**$\left(H^*,H,\mathit{F}(H,S)\right):S^*$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $F:H^*\to H$
Ki: $S\in H$

Ef: $Hossz(X)=N \wedge \exists f:HxH\to H \wedge f_0\in H: F((x_1..x_N))=f(x_1,F(x_2..x_N)),\ F(())=f_0$
Uf: $S=F(X)$

2. Eldöntés$\left(H^*,\mathit{F}(H,\mathbf{L})\right):\mathbf{L}$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $T:H\to\mathbf{L}$
Ki: $VAN\in\mathbf{L}$
Ef: $Hossz(X)=N$
Uf: $VAN \equiv \exists i\in[1,N] : T(x_i)$

3. Kiválasztás$\left(H^*,\mathit{F}(H,\mathbf{L})\right):\mathbf{N}$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $T:H\to\mathbf{L}$
Ki: $SORSZ\in\mathbf{N}$
Ef: $Hossz(X)=N \wedge \exists i\in[1,N]: T(x_i)$
Uf: $SORSZ\in[1,N] \wedge T(x_{SORSZ})$

4. (Lineáris) keresés$\left(H^*,\mathit{F}(H,\mathbf{L})\right):\mathbf{L}\cup\mathbf{L}x\mathbf{N}$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $T:H\to\mathbf{L}$
Ki: $VAN\in\mathbf{L}$, $SORSZ\in\mathbf{N}$
Ef: $Hossz(X)=N$
Uf: $VAN \equiv \exists i\in[1,N] : T(x_i) \wedge VAN \Rightarrow SORSZ\in[1,N]$ és $T(x_{SORSZ})$

5. Megszámolás$\left(H^*,\mathit{F}(H,\mathbf{L})\right):\mathbf{N}$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $T:H\to\mathbf{L}$
Ki: $DB\in\mathbf{N}$
Ef: $Hossz(X)=N$
Uf: $DB = \sum_{\substack{i=1\\T(xi)}}^{N} 1$

6. Maximumkiválasztás$\big(H^*, F(HxH,\mathbf{L})\big)$:$\mathbf{N}$ (index)

Be: $N \in \mathbf{N}$, $X \in H^*$, $\leq \in F(HxH,\mathbf{L})$

Ki: $MAXI \in \mathbf{N}$

Ef: $Hossz(X)=N \wedge N \geq 1 \wedge RendezettHalmaz_{\leq}(H)$

Uf: $MAXI \in [1,N] \wedge \forall i \in [1,N]: x_{MAXI} \geq x_i$

7a. Kiválogatás$\big(H^*, F(H,\mathbf{L})\big)$:$\mathbf{N}^*$ (index)

Be: $N \in \mathbf{N}$, $X \in H^*$, $T:H \to \mathbf{L}$

Ki: $DB \in \mathbf{N}$, $Y \in \mathbf{N}^*$

Ef: $Hossz(X)=N$

Uf: $DB = \sum_{i=1}^{N} 1 \wedge Y \in [1,N]^{DB} \wedge (T(x_{y_i})\ \ i \in [1,DB]) \wedge HalmazFölsorolás(Y)$

7b. Kiválogatás$\big(H^*, F(H,\mathbf{L})\big)$:$H^*$

Be: $N \in \mathbf{N}$, $X \in H^*$, $T:H \to \mathbf{L}$

Ki: $DB \in \mathbf{N}$, $Y \in [1,N]^*$

Ef: $Hossz(X)=N$

Uf: $DB = \sum_{\substack{i=1 \\ T(xi)}}^{N} 1 \wedge Y \in H^{DB} \wedge Y \subseteq X \wedge T(y_i)\ \ i \in [1,DB]$

8. BelsőRendezés$\big(H^*, F(HxH,\mathbf{L})\big)$:$H^*$

Be: $N \in \mathbf{N}$, $X \in H^*$, $\leq \in F(HxH,\mathbf{L})$

Ki: $X' \in H^*$ (X új értéke)

Ef: $Hossz(X)=N \wedge Rendezés(\leq)$

Uf: $X' \in P(X) \wedge RendezettSorozat_{\leq}(X')$

9. IndexesRendezés$\big(H^*, F(HxH,\mathbf{L})\big)$:$\mathbf{N}^*$

Be: $N \in \mathbf{N}$, $X \in H^*$, $\leq \in F(HxH,\mathbf{L})$

Ki: $F \in \mathbf{N}^*$ (felsoroló vektor)

Ef: $Hossz(X)=N \wedge Rendezés(\leq)$

Uf: $X=X' \wedge F \in P([1,N]^N) \wedge RendezettSorozat_{\leq}(X°F)$

(azaz $\forall i,j \in [1,N]: (i<j)\ x_{f_i} \leq x_{f_j}\ \ f_i \leq f_j$)

második változat:

Be: $N \in \mathbf{N}$, $X \in H^*$, $\leq \in F(HxH,\mathbf{L})$

Ki: $S \in \mathbf{N}^*$ (sorrend-vektor)

Ef: $Hossz(X)=N \wedge Rendezés(\leq)$

Uf: $X=X' \wedge S \in P([1,N]^N) \wedge \forall i,j \in [1,N]: (i<j)\ x_i \leq x_j\ \ s_i \leq s_j$

10. Szétválogatás$\big(H^*, F_i(H,\mathbf{L})\ (i=1..K)\big)$:$(H^*)^K$

Be: $N \in \mathbf{N}$, $X \in H^*$, $K \in \mathbf{N}$, $Ti:H \to \mathbf{L}$ (i=1..K)

Ki: $DB_i \in \mathbf{N}$, $Y_i \in H^*$ (i=1..K)

Ef: $Hossz(X)=N \wedge K \geq 2 \wedge T_i$ (i=1..K) H partícionálása

Uf: $DB_i = \sum_{\substack{i=1 \\ Tii(xj)}}^{N} 1 \wedge Y_i \in H^{DB}{}_i \wedge Y_i \subseteq X \wedge \forall j \in [1,DB_i]: T_i(y_{i_j})\ (i=1..K)$

Megjegyzések:

1. „Alapvariációja": indexsorozatokkal történő szétválogatás

Szétválogatás$\big(H^*, F_i(H,\mathbf{L})\ (i=1..K)\big)$:$(\mathbf{N}^*)^K$

2. Kétfelé szétválogatás: (T_1:=T, T_2:= nem-T)

Szétválogatás$\left(H^*, F(H,\mathbf{L})\right):(H^*)^2$

a. Külön, két outputsorozatba

b. Helyben: „elválasztó indextől” balra a T-, jobbra a nem-T-tulajdonságúakat

11. Metszet$\left(H^*,H^*\right):H^*$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $M\in\mathbf{N}$, $Y\in H^*$

Ki: $DB\in\mathbf{N}$, $Z\in H^*$ [pontosabban $Z\in H^{\min(N,M)}$]

Ef: Hossz(X)=N ∧ HalmazFölsorolás(X) ∧ Hossz(Y)=M ∧ HalmazFölsorolás(Y)

Uf: $DB = \sum_{\substack{i=1\\ xj\in Y}}^{N} 1 \wedge Z\in H^{DB}$ ∧ HalmazFölsorolás(Z) ∧

$z_i\in X \wedge z_i\in Y \quad i\in[1,DB]$

12. Egyesítés$\left(H^*,H^*\right):H^*$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $M\in\mathbf{N}$, $Y\in H^*$

Ki: $DB\in\mathbf{N}$, $Z\in H^*$ [pontosabban $Z\in H^{N+M}$]

Ef: Hossz(X)=N ∧ HalmazFölsorolás(X) ∧ Hossz(Y)=M ∧ HalmazFölsorolás(Y)

Uf: $DB = N + \sum_{\substack{i=1\\ yj\notin X}}^{N} 1 \wedge Z\in H^{DB}$ ∧ HalmazFölsorolás(Z) ∧

$z_i\in X \vee z_i\in Y \quad i\in[1,DB]$

13. Összefuttatás$\left(H^*,H^*,F(HxH,\mathbf{L})\right):H^*$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $M\in\mathbf{N}$, $Y\in H^*$, $\leq\in F(HxH,\mathbf{L})$

Ki: $DB\in\mathbf{N}$, $Z\in H^*$ [pontosabban $Z\in H^{N+M}$]

Ef: Rendezés(≤) ∧ Hossz(X)=N ∧ HalmazFölsorolás(X) ∧
Hossz(Y)=M ∧ HalmazFölsorolás(Y) ∧
$\text{RendezettSorozat}_{\leq}(X) \wedge \text{RendezettSorozat}_{\leq}(Y)$

Uf: $DB = N + \sum_{\substack{i=1\\ yj\notin X}}^{N} 1 \wedge Z\in H^{DB}$ ∧ HalmazFölsorolás(Z) ∧

$\text{RendezettSorozat}_{\leq}(Z) \wedge z_i\in X \wedge z_i\in Y \quad i\in[1,DB]$

Keresések

Új fogalmak:

$L\in H^*$ *lehetségesek sorozata*	– az eredeti X egy alkalmasan választott rész-sorozata: $L\subseteq X$
$\lVert . \rVert: H^*\to\mathbf{N}$ *hossz*	– sorozat hossza (elemszáma)
$\sigma: H^*\to H^*$ *szűkítés*	– $\forall L\in H^*: \sigma(L)=L_1 \ \lVert L\rVert>\lVert L_1\rVert$
$\varepsilon: H^*\to\mathbf{N}$ *elemkiválasztás*	– $\forall L\in H^*: \varepsilon(L)\in[1,L]$

Ezen fogalmakkal az *általános keresés tétel megfogalmazása*:

L:=X
Ciklus amíg ‖L‖>0 és nem T(X(ε(L)))
  L:=σ(L)
Ciklus vége
Van:=‖L‖>0
Ha Van **akkor** Sorsz:=ε(L)

Nézzük a *lineáris keresés tétel újrafogalmazás*át!

$L:=\{x_i: i\in[e,N]\}$ (elejétől végig, e: ahol tartunk=1..N+1)

L azonosítható, sőt helyettesíthető is az első elemének indexével: $L:=L(e)\to e$

$\varepsilon(L(e)):=x_e$ (első elem)

$\sigma(L(e)):=\{x_i\ i\in[e+1,N]\}\subseteq\{x_i\ i\in[e,N]\}$

$\|L(e)\|$:=N-e+1

L:=X [i:=1, 1.-nél kezdődik a ... sorozat]
Ciklus amíg $\|L\|>0$ [i≤N, azaz még van hol keresni] és
nem T(X(ε(L))) [T(X(i)), azaz az i. olyan-e]
L:=σ(L(ε(L))) [i:=i+1, a következőnél kezdődik a ... sorozat]
Ciklus vége
Van:=$\|L\|>0$ [i≤N, azaz lenne még hol keresni, de megvan]
Ha Van **akkor** SORSZ:=ε(L).sorsz [SORSZ:=e]

A közismert keresésekben az alábbi értelmezésű függvényeket szoktuk használni:

1. $\varepsilon_l((x_i,...,x_j)):=i$ (első)
2. $\varepsilon_u((x_i,...,x_j)):=j$ (utolsó)
3. $\varepsilon_k((x_i,...,x_j)):=(i+j)\ DIV\ 2$ (középső)
4. $\sigma_l((x_i,...,x_j)):=(x_{i+1},...,x_j)$ (első elem nélkül)
5. $\sigma_u((x_i,...,x_j)):=(x_i,...,x_{j-1})$ (utolsó elem nélkül)

6'. $\sigma_{k<}((x_i,...,x_j)):=(x_l,...,x_m)\subseteq(x_i,...,x_j)$, ahol $l=i$ és $m=(i+j\ DIV\ 2)$-1

6". $\sigma_{k>}((x_i,...,x_j)):=(x_l,...,x_m)\subseteq(x_i,...,x_j)$, ahol $l=(i+j\ DIV\ 2)$+1 és $m=j$

7. $\sigma_<((x_i,...,x_j)):=(x'_l,...,x'_k)\subseteq(x_i,...,x_j)$ $\forall x'_m<x_i$ $m\in[l,k]$ (elsőnél kisebbek)

15. LineárisKeresésRendezetben$\left(H^*,H,F(HxH,\mathbf{L})\right)$:L∪LxN

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $y\in H$, $T_y:H\rightarrow\mathbf{L}$ ($T_y(h)\equiv h=y$ $\forall h\in H$), $\leq\in F(HxH,\mathbf{L})$

Ki: VAN∈**L**, SORSZ∈**N**

Ef: Hossz(X)=N ∧ Rendezés(≤) ∧ RendezettSorozat$_\leq$(X)

Uf: VAN ≡ $\exists i\in[1,N]$: x_i=y ∧ VAN ⇒ SORSZ∈[1,N] ∧ x_{SORSZ}=y

Absztrakt algoritmus:

L:={x_i: $i\in$[e,N]} (elejétől végig, e: ahol tartunk=1..N+1)

Az e a sorozat elejét jelöli, amelyben még lehet a keresett. Figyelem: az L sorozat még annak előtte, hogy az N. eleméhez érnénk véget érhet! (Ha x>y bekövetkezett.)

L azonosítható, sőt helyettesíthető is az első elemének indexével: L:=L(e)→e

ε(L(e)):=ε_l(L(e)):=e (a mindenkori első elem)

σ(L(e)):={x_i: $i\in$[e+1,N]}, ha $x_e\leq$y (1)

σ(L(e)):={x_i: $i\in$[N+1,N]}, ha x_e>y (2)

(1) és (2) ⊆ {x_i: $i\in$[e,N]}

L(e):=N-e+1 (L(e)>0 ⇔ N-e+1>0 ⇔ N≥e)

e:=1
Ciklus amíg N≥e és X(e)≠y
Elágazás
X(e)<y **esetén** e:=e+1
X(e)>y esetén e:=N+1
Elágazás vége
Ciklus vége
Van:=N≥e
Ha Van **akkor** SORSZ:=e

Vegyük észre:

1. a ciklusból kilépünk, ha 'nem N≥e vagy X(e)=y' teljesül;

N<e ⇔ találunk nagyobbat: X(e)>y (l. σ definícióját)
vagy egyszerûen a sorozat végére érünk: N+1=e

2. Így a ciklusfeltételre következő igaz:

N≥e és X(e)≠y nem (X(e)>y vagy N+1=e) és X(e)≠y ⇔
X(e)≤y és N+1>e és X(e)≠y ⇔ N+1>e és X(e)<y ⇔ N≥e és X(e)<y

3. Ezen átalakítás után a ciklusmagban fölöslegessé vált az elágazás, hiszen az első ág triviálisan igaz, a másik meg sohasem igaz.

4. Ezzel viszont a kilépés okát már nem jelzi egyértelmûen az '$N\geq e$' feltétel (hiszen az L sorozat üresre állítását nem végzi el senki): egybemosódott a sikeres és az értelmetlen keresést meggátoló kilépés. A sikerességet jelenti az '$N\geq e$ és $X(e)=y$' feltétel teljesülése. Vagyis:

```
e:=1
Ciklus amíg N≥e  és  X(e)<y
  e:=e+1
Ciklus vége
Van:=N≥e és X(e)=y
Ha Van akkor SORSZ:=e
```

5. Egyszerűsödik az algoritmus, ha sikerül egyszerűsíteni e szétválás érzékelése. A trükk mindössze annyi, hogy az utolsó elem előtt kilépünk, s ennek vizsgálatára redukáljuk a problémát:

```
e:=1
Ciklus amíg N>e  és  X(e)<y
  e:=e+1
Ciklus vége
Van:=X(e)=y
Ha Van akkor SORSZ:=e
```

16. LogaritmikusKeresés$\left(H^*,H,F(HxH,\mathbf{L})\right)$:$\mathbf{L}\cup\mathbf{L}x\mathbf{N}$

Be: $N\in\mathbf{N}$, $X\in H^*$, $y\in H$, $T_y:H\rightarrow\mathbf{L}$ ($T_y(h)\equiv h=y\ \forall h\in H$), $\leq\in F(HxH,\mathbf{L})$

Ki: $VAN\in\mathbf{L}$, $SORSZ\in\mathbf{N}$

Ef: $Hossz(X)=N \wedge Rendezés(\leq)$ és $RendezettSorozat_{\leq}(X) \wedge$
$\exists elem:H^N x\mathbf{N}\rightarrow H$ szelekciós függvény: $elem(X,i)=x_i$

Uf: $VAN \equiv \exists i\in[1,N] : x_i=y \ \wedge\ VAN \Rightarrow SORSZ\in[1,N] \wedge x_{SORSZ}=y$

Absztrakt algoritmus:

$L:=\{x_i: i\in[e,v]\}$ $\big($a mindenkori eleje, vége, kezdetben: (1,N)$\big)$

L azonosítható, sőt helyettesíthető is az első és az utolsó elemének indexével:
$L:=L(e,v) \rightarrow (e,v)$

$\varepsilon(L(e,v)):=\varepsilon_k(L(e,v)):=(e+v)$ DIV 2   (középső elem)

$\sigma(L(e,v)):=\sigma_{k\leq}(L(e,v))$, ha $x_{L(e,v)}<y$ (1)

$\sigma(L(e,v)):=\sigma_{k\geq}(L(e,v))$, ha $x_{L(e,v)}>y$ (2)

$\|L(e,v)\|:=v-e+1$ ($\|L(e,v)\|>0 \Leftrightarrow v-e+1>0 \Leftrightarrow v\geq e$)

```
(e,v):=(1,N)
Ciklus amíg v≥e  és  X((e+v) DIV 2)≠y
  Elágazás
    X((e+v) DIV 2))>y esetén (e,v):=(e,((e+v) DIV 2)-1)
    X((e+v) DIV 2))<y esetén (e,v):=(((e+v) DIV 2)+1,v)
  Elágazás vége
Ciklus vége
Van:=v≥e
Ha Van akkor SORSZ:=(e+v) DIV 2
```

Az egyszerûbb leírhatóság érdekében tároljuk az $\varepsilon(L(e,v))$-dik $\big(=(e+v)$ DIV 2$\big)$ elem indexrészét a k változóban, e leválasztás viszont a külön kiszámolást jelenti! Másrészt az '$X(k)\neq y$' feltétel kétirányúra egyszerűsíti a ciklusmagot. Így az alábbi algoritmus marad:

```
(e,v):=(1,N): k:=(e+v) DIV 2
Ciklus amíg v≥e  és  X((e+v) DIV 2)≠y
  Ha X(k)>y akkor   v:=k-1
            különben e:=k+1
Ciklus vége
Van:=v≥e
Ha Van akkor SORSZ:=(e+v) DIV 2
```

17. VisszalépésesKeresés$\left((H^{*,1} x H^{*,2} x...), F(H_1 x H_2 x..., \mathbf{L})\right)$:$\mathbf{L} \cup \mathbf{L} x \mathbf{N}^*$

Be: $K \in \mathbf{N}$, $M \in \mathbf{N}^*$ (*K hosszú méretsorozat*),
$Y_i \in H_i^*$ $(\forall i \in [1,K])$ (*M_i elemszámú lehetőségsorozatok*),
$l: \bigcup_{i=1}^{K} \times_{j=1}^{i} Hj \rightarrow \mathbf{L}$ (*lehetőségek összeférése*),

Ki: $VAN \in \mathbf{L}$, $X \in \mathbf{N}^*$ (*az összeférő lehetőségek indexeinek sorozata*)

Ef: $K \geq 2 \wedge Hossz(M)=K \wedge$
$HalmazFölsorolás(Y_i)\ \forall i \in [1,K] \wedge$
$\forall j \in [1,K], \forall i \in [1,j]\ l(h_1,...,h_j) \Rightarrow l(h_1,...,h_i)$

Uf: $VAN \equiv \exists Z \in Y_1 \mathbf{x} Y_2 \mathbf{x} ... \mathbf{x} Y_K: l(Z) \wedge$
$VAN \Rightarrow y^{(i)}_{x_i} \in Y_i$ és $l(y^{(1)}_{x_1},...,y^{(k)}_{x_k})$

Absztrakt algoritmus:

L: A keresett megoldás a $\mathop{x}\limits_{i=1}^{K} Y_i$ K-dimenziós tér egy pontja, amely kielégíti az l-t. Ennek megadását az X-tömb végzi az Y_i-beli komponensek *indexei*nek felsorolásával. A megoldás keresése során e teret kell ügyesen bejárnunk, lehetőleg úgy, hogy ne kelljen mind az M_1*...*M_K „pontjának" vizsgálatát elvégeznünk. Ezt úgy tesszük, hogy szisztematikusan szűkítjük a teret egyre szűkülő alterek uniójára, azáltal, hogy újabb és újabb komponensét kötjük meg a leendő megoldásnak. Kezdetben csak az 1. dimenzióban lesz kötött érték. Ekkor tehát a térnek azt a K-1 dimenziós alterét szemeltük ki további vizsgálatra, amelynek 1. komponense éppen a rögzített érték. A vizsgálatra szoruló pontok halmaza még a teljes tér. Amikor kiderül a komponensek konkretizálása során, hogy a „koncentrált" altér nem tartalmazhatja a megoldást, akkor a teljes alteret elvetve vesszük a „szomszédos" (valamelyik soron következő, azaz a megfelelő Y_i-beli későbbi elem által meghatározott) alteret.
Ezek után az L a következő indexsorozatok *halmaz*a: az (1,1, ..., 1), első elemek sorozatától az $(m_1,m_2,...,m_K)$ utolsó sorozatig „tart". (Az $m_i = \| Y_i \|$.) (Formális okok miatt egészítsük ki a fenti teret olyan elemekkel is, amelyek bármely koordinátája a 0 is lehet.) Ezt a halmazt tesszük pontok *sorozat*ává az ε és σ függvények segítségével.
A gondolatmenetből nyilvánvaló, hogy a pontfelsorolás alapja az L-beli sorozatok *kezdőszelet*ei lesznek. Az aktuális L azonosítására mód van a "kiinduló" sorozat nem triviális (azaz rögzített) elemeket tartalmazó kezdőszelete által:

$L:=L(x_1,x_2,...x_i)$ (az x_i-k az *indexek*et jelentik),

elvárjuk, hogy

$L(x_1,x_2,...x_i)=L(x_1,x_2,...x_i,0,...,0)$.

Vegyük észre az L alábbi tulajdonságait!

1. Az összes lehetőség L halmaza: L(1,1,...,1).
2. Monoton csökkenés:

a. $L(x_1,...,x_i)=L(x_1,...,x_{i+1})\quad \forall x_{i+1} \in [1,m_{i+1}]$,
azaz „előrehaladáskor" nem csökken a vizsgálatban szereplők száma;

b. $L(x_1,...,x_i) \supset L(x_1,...,x'_{i-1})\quad \forall x'_{i-1} \in (x_{i-1},m_{i-1}]$.
azaz „visszalépéskor" éppen annyival csökken, ahány „dimenziós" alteret sikerült kizárni a további vizsgálatból, pontosabban éppen az
$\{(x_1,...,x_{i-1},\mathbf{x'}_i,...,\mathbf{x'}_K) : \forall j \in [i,K]\ \forall \mathbf{x'}_j \in [1,m_j] \}$
alteret, ami elemszáma $\prod_{j=i}^{K} m_j$;

c. $L(x_1,...,x_i) \supset L(x_1,...,x'_i)\quad \forall x' \in (x_i,m_i]$,

azaz többszörös visszalépés után az „átlépett” alterekbeli elemekkel csökkenthető a vizsgálat;
d. a b. és a c.-ből következik, hogy a „legkisebb” $L(x_1,...,x_i)$ az L(), amely az $L(x_{m_1})$-ből való visszalépés után adódik. Ebben 0 darab elem van.

Az „L-mérték” nyomon követését végzi a $\|.\|$ *függvény*, így elkerülhetetlen ennek matematikai megragadása. Nyilvánvaló lehetőség lenne az előbbiekre építve a még ki nem szórt pontok számával mérni. Ennél lényegesen egyszerűbb mód is van. A d. figyelembe vételével az L üressé válását észlelhetjük az éppen a lerögzített elemek számának figyelésével: amikor az 0-ra csökken, akkor ürült ki a tér is.

Az ε értelmezése következik:

$$\varepsilon\big(L(x_1,...x_i)\big):=(x_1,...x_i,0,...,0)$$

Nézzük a σ meghatározását!

$$\sigma\big(L(x_1,...x_i)\big):=\begin{cases} L(x_1,...,x_i,x_{i+1}) & ,i\le K \wedge l(x_1,...,x_i,x_i) \\ \sigma(L(x_1,...,x'_{i-1},0)) & ,i\ge 1 \wedge \neg l(x_1,...,x_i,x_i) \\ & \wedge \exists^* j\in[1,i) : \exists_* z_j \in (x_j,m_j] : l(x_1,...,z_j) \end{cases}$$

Magyarázatok, jelölések, megállapodások és megállapítások:

1. $\exists^* x'_v$ jelentése: $\exists x'_v \in (x_v,m_v]$ és az *első olyan* ..., illetve ha $\neg\exists x'_v$ korábbi értéke (azaz $x'_v=0$), akkor $x'_v\in[1,m_v]$ és *olyan*.
2. Természetesen a második ágra csak az első ág feltételének nem teljesülése esetén kerülhet sor.
3. Az i jelölje a vizsgált megoldássorozat nem triviális kezdőszeletének hosszát! Ekkor $L>0 \Leftrightarrow i\ge 1$.
4. A keresett elemig akkor jutunk, amikor $i>K$.
5. Nincs meg a keresett elem (azaz L=**0**), ha $i<1$.
6. (Mint nyilvánvaló:) az L-t az *i* és az X *együtt* határozzák meg!
   Így pl. $L:=X \Leftrightarrow i:=1: X:=0$

Az algoritmus:

Típus Keresett=**Rekord**(van:Logikai,melyik:Egész)

i:=1 [i. kezdőszeletnél tartunk]
X(1..N):=0 [még nincs rögzített]
Ciklus amíg i≥1 és i≤K
  ker:=JóElem(i) [az i.-ig lehetséges-e a kiválasztás?]
  Elágazás
    I≤K és ker.van **esetén** X(i):=ker.melyik; i:+1
    i≥1 **esetén** X(i):=0; i:-1
  Elágazás vége
Ciklus vége
Van:=i≥1
[X-ben található a megoldás, ha létezik]

Mivel a ciklusban csak i≥1 és i≤K esetben vagyunk, s csak ekkor történhet az i növelése, vagy csökkentése, ezért a kétirányú elágazás helyett írható Ha-típusú elágazás is, egyszerûbb feltétellel. Így kapjuk:

i:=1 [i. kezdőszeletnél tartunk]
X(1..N):=0 [még nincs rögzített]
Ciklus amíg i≥1 és i≤K
  ker:=JóElem(i) [az i.-ig lehetséges-e a kiválasztás?]
  Ha ker.van **akkor** X(i):=ker.melyik; i:+1
    különben X(i):=0; i:-1
Ciklus vége
Van:=i≥1
[X-ben található a megoldás, ha létezik]

```
Függvény JóElem(i:Egész): Keresett
                        [i.-ig nem triviális sorozat megoldás-e?]
 j:=X(i)+1
 Ciklus amíg j≤M(i) és nem Lehetséges(i,j)
  j:+1
 Ciklus vége
 JóElem.van:=j≤M(i)
 Ha JóElem.van akkor JóElem.melyik:=j
Függvény vége.

Függvény Lehetséges(i,j:Egész): Logikai
                        [i. komponens összefér-e az eddigiekkel?]
 Lehetséges:=l(Y(1)(X(1)),...,Y(i-1)(X(i-1)), Y(i)(j))
Függvény vége.
```

A visszalépéses keresés (backtrack) elvének beépítése más tételekbe

Mindössze annyi az észreveendő, hogy

1. L>0 i≥1
2. T(ε(L)) i≤K
3. σ(L,ε(L)) keresett:=JóElem(i)

```
Ha  keresett.van  akkor  X(i):=keresett.melyik;  i:+1
             különben X(i):=0;  i:-1
```

Így pl. a megszámolás tétel variánsa a következő lesz. Annyi előzetes átalakításra szükség van, hogy a megszámolás tétel 'számlálásos ciklusát' 'amígos'-ra kell átírni.

```
Db:=0
i:=1;  X(i):=0 (i=1..K)
Ciklus amíg i≥1
 Ha  i>K  akkor  Db:+1;  i:-1
                      [visszalép a K. komponenshez]
 keresett:=JóElem(i)
 Ha  keresett.van  akkor  X(i):=keresett.melyik;  i:+1
              különben X(i):=0;  i:-1
Ciklus vége
```

... vagy a maximumkiválasztás ... (Itt feltételezzük, hogy ∃ ≤ rendezés az L téren, ami X megoldásokat összevethetővé tesz. Az egyszerûség kedvéért föltesszük, hogy az L legkisebb eleme az (0,...,0).)

```
i:=1; X(1..K):=0
Max:=X  [az eddigi „legnagyobb”, „legjobb” megoldás]
Ciklus amíg i≥1
 Ha i>K akkor
  Ha Max<X akkor  Max:=X
  i:-1  [visszalép a K. komponenshez]
 Elágazás vége
 keresett:=JóElem(i)
 Ha  keresett.van  akkor  X(i):=keresett.melyik: i:+1
              különben X(i):=0 : i:-1
Ciklus vége
Van:=i≥1
[Max-ban található a megoldás, ha létezik]
```