ANALÍZIS
matematikatanár szakosok részére
(I-II. félév, 2004/2005)

írta: SZILÁGYI TIVADAR

1. BEVEZETÉS

A matematika egyik ágának neveként használt „analízis" szó a függvényanalízis, vagyis a függvényvizsgálat szóból származik. A függvények közül hosszú ideig szinte kizárólag valós értékű függvényekkel foglalkozunk. A szorosabb értelemben vett analízis tanulmányozásának megkezdése előtt célszerű áttekinteni bizonyos alapvető ismereteket a halmazelmélet és a logika témaköréből, továbbá a valós számok témaköréből.

1.1. Halmazok, halmazműveletek

A *halmaz* fogalmát, és *a halmazhoz való hozzátartozás* fogalmát (más szóval *a halmaz eleme* fogalmát) alapfogalmakként kezeljük, tehát ezeket nem definiáljuk.

Első közelítésben mondhatjuk ugyan, hogy a halmaz bizonyos – jól definiált – dolgok *összessége*, de ez utóbbi fogalom általánosabb, mint a halmaz fogalma. Például megmutatható, hogy az összes halmazok összessége nem lehet halmaz. Az előbbi mondatban említett jóldefiniáltság a következőt jelenti: bármely A dologgal és X halmazzal kapcsolatban egyértelműen eldönthető, hogy A hozzá tartozik-e az X halmazhoz, vagy sem, vagyis $A \in X$ vagy $A \notin X$.

A halmazelmélet axiomatikus megalapozásának egyik célja annak tisztázása, hogy mely *összességeket* lehet halmazoknak nevezni, például: adott halmazokból milyen eljárásokkal nyerhetünk újabb halmazokat. Mi *nem* foglalkozunk a halmazelmélet axiomatikus felépítésével, csak *példa*ként említünk három axiómát.

A következő állítást meghatározottsági axiómának nevezik:

Ha az A és B halmazoknak ugyanazok az elemei, akkor az A halmaz egyenlő a B halmazzal.

Ez az axióma tehát azt mondja ki, hogy a halmazokat egyértelműen meghatározzák az elemeik. Éppen ennek köszönhetően, amikor az technikailag megvalósítható, halmazokat jelölhetünk úgy, hogy kapcsos zárójelek között felsoroljuk az elemeinek jelölésére szolgáló szimbólumokat, a szomszédosakat egy-egy vesszővel választva el egymástól. Például a 6-nál kisebb pozitív egész számok halmazát jelölhetjük így: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Megjegyzendő, hogy az ilyen fajta jelölés használata esetén ugyanaz az elem többször is szerepelhet a felsorolásban, tehát például ha az f függvénynek az x, y és z helyeken felvett értékeiből álló $\{f(x), f(y), f(z)\}$ halmazról beszélünk, akkor elképzelhető, hogy e halmaz elemeinek száma csak 2 vagy 1.

1.1. Definíció (részhalmaz, valódi részhalmaz). *Az a kijelentés, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, a következőt jelenti: az A halmaz minden egyes eleme egyúttal a B halmaznak is* *eleme; ezt a kijelentést az $A \subset B$ jelsorozattal rövidítjük. Ha A részhalmaza B-nek, de nem egyenlő vele, akkor azt mondjuk, hogy A valódi részhalmaza B-nek.*

A részhalmaz fogalmát használva, a meghatározottsági axióma így fogalmazható: ha A és B halmazok, $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$.

Az, hogy egyáltalán létezik legalább egy halmaz, a rendezetlen párok axiómájából következik:

Bármely két – nem feltétlenül különböző – dologból, mondjuk a-ból és b-ből, lehet képezni olyan halmazt, amelynek a is, b is eleme, s melynek más eleme nincs.

A meghatározottsági axiómából lehet következtetni arra, hogy bármely a-hoz és b-hez *egyetlen* ilyen halmaz található, ezt nevezik az a-ból és b-ből képezett rendezetlen párnak. Jelölése: $\{a, b\}$; $b = a$ esetén $\{a\}$.

A *részhalmaz-axióma* így szól:

Legyen H halmaz, T pedig H-n értelmezett tulajdonság (azaz: H minden egyes eleméről egyértelműen eldönthető, hogy megvan-e a T tulajdonsága vagy nincs meg). Ekkor H azon elemeinek összessége, amelyeknek megvan a T tulajdonsága, szintén halmaz.

T tulajdonság helyett beszélhetünk – a közoktatásban helyenként használt kifejezést kölcsön véve – T nyitott mondatról is, ez olyan hozzárendelés, amely a H halmaz minden egyes eleméhez hozzárendel egy határozott logikai értékkel (igaz vagy hamis) rendelkező állítást. Ekkor a részhalmaz-axióma szerint a H halmaz azon x elemeinek összessége, amelyekre a $T(x)$ állítás igaz, maga is halmaz. Ezt a halmazt így szokás jelölni:

$$\{x \in H \, : \, T(x)\},$$

például

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$$

azoknak a valós számoknak a halmaza, amelyeknek a négyzete kisebb, mint 1, vagyis ez a -1-nél nagyobb és 1-nél kisebb valós számok halmaza. Megjegyzendő, hogy itt a kettőspont helyett sokan inkább függőleges vonalat írnak.

A részhalmaz-axiómából következik az üres halmaz létezése, vagyis azé a halmazé, amelynek egyetlen eleme sincs (pontosabban az következik, hogy ha egyáltalán létezik legalább egy halmaz, akkor létezik az üres halmaz is): tetszőleges H halmazhoz vegyük azt a T nyitott mondatot, amely minden egyes H-beli x elemhez az $x \neq x$ állítást rendeli hozzá. Az üres halmaz jelölésére a $\emptyset$ szimbólumot használjuk.

1.2. Definíció (különbséghalmaz). *Tetszőleges A és B halmazok (halmazelméleti) különbségén az*

$$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$$

halmazt értjük.

1.3. Definíció (kiegészítő halmaz). *Ha valamely vizsgálat során a szereplő halmazok mindegyike egy rögzített és alaphalmaznak nevezett halmaz részhalmaza, akkor ezen X alaphalmaz tetszőleges A részhalmazának kiegészítő halmazán, vagy komplementerén az*

$$A^c := X \setminus A$$

különbséghalmazt értjük.

1.4. Definíció (rendezett pár). *Rendezett páron olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya az 1 és 2 számokból álló $\{1, 2\}$ halmaz. E függvénynek az 1, illetve a 2 helyen felvett értékét a rendezett pár első, illetve második komponensének nevezzük. Jelölés: (a, b), ahol a, illetve b a rendezett pár első, illetve második komponense.*

Most ennek a fogalomnak egy általánosítását vezetjük be.

1.5. Definíció (rendezett m-es, vagy m-tagú sorozat). *Tetszőleges pozitív egész m szám esetén rendezett m-esen vagy m-tagú sorozaton olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya az m-nél nem nagyobb pozitív egész számok halmaza; ha k m-nél nem nagyobb pozitív egész, akkor e függvénynek a k helyen felvett értékét a rendezett m-es k-adik komponensének, illetve az m-tagú sorozat k-adik tagjának nevezzük. Jelölés: $(a_1, \ldots, a_m)$, ahol $k = 1, \ldots, m$ esetén a_k a rendezett m-es k-adik komponense.*

Evidens, hogy a rendezett m-es fogalmából speciális esetként —az m értékét 2-nek választva— megkapjuk a rendezett pár fogalmát.

Attól függően, hogy az m-tagú sorozat tagjai miféle (matematikai) objektumok, szokás használni az m-tagú számsorozat, halmazsorozat, vektorsorozat, stb. szavakat, illetve rendezett pár esetén a számpár, halmazpár, vektorpár... szavakat.

1.6. Megjegyzés. *Ha a halmazelméletet szigorúan deduktív módon akarnánk tárgyalni, akkor a rendezett párt a függvény fogalmának felhasználása nélkül — például az $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ egyenlőséggel — értelmeznénk, ezt követné a relációk bevezetése, majd a függvényeké mint speciális relációké, utána lehetne megkonstruálni a természetes számok halmazát, és csak mindezek után következhetne az 2-nél nagyobb m-ek esetén a rendezett m-esek fogalmának a bevezetése.*

1.7. Definíció (rendezett halmaz-m-es Descartes-szorzata). *Egy $(A_1, \ldots, A_m)$ halmazsorozat Descartes-szorzatán azoknak a rendezett m-eseknek a halmazát értjük, amelyekre minden m-nél nem nagyobb pozitív egész k esetén a rendezett m-es k-adik komponense eleme az A_k halmaznak. Jelölések: $m = 2$ esetén $A_1 \times A_2$, tetszőleges m esetén*

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \quad \textit{vagy} \quad A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m;$$

ha mindegyik i esetén A_i ugyanazzal az X halmazzal egyenlő, akkor az X^2, illetve az X^m jelölést használjuk.

Szándékosan kerültük azt a pongyola szóhasználatot, amely az $A_1, \ldots, A_m$ halmazok Descartes-szorzatáról beszél, és nem az $(A_1, \ldots, A_m)$ halmazsorozatéról.

1.8. Definíció. *Halmazrendszeren olyan halmazt értünk, amelynek minden egyes eleme maga is halmaz.*

Halmazrendszer jelölésére általában írott nagy betüket használunk. Konkrét halmazrendszereket többnyire (halmazértékű) függvény értékkészleteként szoktak megadni. Így például lehet beszélni a $\{(k\pi, (k+1)\pi,)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ halmazrendszerről. Megjegyzendő, hogy a „halmazértékű függvény” kifejezés helyett egyesek a „halmazcsalád” szót használják.

1.9. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$ halmazrendszer unióhalmaza az a halmaz, melynek elemei $\mathcal{H}$ elemeinek elemei. Jelölés: $\cup\mathcal{H}$. Ha a halmazrendszer valamely $(H_x)_{x\in X}$ függvény értékkészleteként van megadva, akkor az unióhalmaz jelölésére inkább az*

$$\bigcup_{x\in X} H_x$$

jelsorozatot használjuk. Speciálisan, ha $X = \overline{1,m}$ $(m > 2)$, illetve ha $X = \mathbb{Z}^+$, akkor az

$$\bigcup_{x\in\overline{1,m}}, \quad \textit{illetve} \quad \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^+} \quad \textit{helyett az} \quad \bigcup_{x=1}^{m}, \quad \textit{illetve az} \quad \bigcup_{x=1}^{\infty}$$

szimbólumokat használjuk. Végül abban a jól ismert speciális esetben, amikor $\mathcal{H}$ egy $\{A, B\}$ rendezetlen párral egyenlő, természetesen maradunk a már jól megszokott $A \cup B$ jelölésnél, s hasonló a helyzet akkor is, ha $\mathcal{H}$ véges és elemszáma nem sokkal több, mint kettő: $A \cup B \cup C$, $A \cup B \cup C \cup D$, stb.

Az $\cup\mathcal{H}$ halmaz definíciója tehát így írható körül: $x \in \cup\mathcal{H}$ pontosan akkor teljesül, ha létezik az $x \in H$ feltételnek eleget tevő $H \in \mathcal{H}$ halmaz. Például a ctg függvény értelmezési tartománya egyenlő a definíció előtt említett halmazrendszernek (intervallumrendszernek) az unióhalmazával.

1.10. Definíció. *Egy nemüres $\mathcal{H}$ halmazrendszer metszethalmaza*

$$\{x \in \cup\mathcal{H} : \forall\ H \in \mathcal{H} \ \ x \in H\}.$$

Jelölései csak annyiban térnek el az unióhalmazéitól, hogy az $\cup$ jel helyére mindenhol a $\cap$ jel kerül.

1.2. Különféle számhalmazok jelölése és elnevezése

$\mathbb{R}$ az összes valós számok halmaza,
$\mathbb{R}^+$ az összes pozitív valós számok halmaza,
$\mathbb{Q}$ az összes racionális számok halmaza,
$\mathbb{Z}$ az összes egész számok halmaza,
$\mathbb{Z}^+$ az összes pozitív egész számok halmaza,

tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ és tetszőleges a-nál nem kisebb $b \in \mathbb{R}$ esetén

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$$

az „a, b zárt intervallum”, ezt $b = a$ esetén elfajulónak, $a < b$ esetén nemelfajulónak nevezzük,

tetszőleges valós a és tetszőleges nála nagyobb valós b esetén

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

az „a, b nyílt intervallum”,

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$$

az „balról nyílt, jobbról zárt a, b intervallum” és

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$$

a „balról zárt, jobbról nyílt a, b intervallum”,

tetszőleges valós u és tetszőleges pozitív p szám esetén a $B(u, p) := (u - p, u + p)$ intervallumot „az u szám p sugarú környezetének” is nevezzük.

tetszőleges c valós szám esetén

$$(-\infty, c) := \{x \in \mathbb{R} : x < c\}, \qquad (-\infty, c] := \{x \in \mathbb{R} : x \le c\},$$

$$(c, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : c < x\}, \qquad [c, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : c \le x\}$$

a „mínusz végtelen c nyílt”, illetve „mínusz végtelen c jobbról zárt” intervallum, továbbá a nyílt, illetve balról zárt „c plusz végtelen intervallum”,

végül tetszőleges k és n egész számok esetén
$\overline{k, n} := \{m \in \mathbb{Z} \,:\, k \le m \le n\}$ (ez persze $n < k$ esetén egyenlő az üres halmazzal).

1.3. A valós számok (rendezett testének) axiómarendszere

Azok az eljárások, amelyek a valós számok halmazának bevezetésére szolgálnak, két csoportba oszthatók. Az egyik lehetőség, hogy halmazelméleti konstrukciók alkalmazásával négy lépésben megkonstruáljuk az egyre bővebb számhalmazokat: az $\mathbb{Z}^+$, a $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$, végül az $\mathbb{R}$ halmazt; minden egyes lépésben definiálva a műveleteket és a rendezést, és bizonyítva ezek lényeges tulajdonságait. A másik lehetőség az axiomatikus felépítés. Mi ennek az utóbbinak egy változatát, pontosabban annak is csak egy kis részét mutatjuk be.

Axiómarendszerünk alapfogalmai a következők lesznek:

egy $\mathbb{R}$-rel jelölt halmaz, melynek elemeit valós számoknak nevezzük;

az $\mathbb{R}$ halmaz két különböző eleme: 0 és 1;

két $\mathbb{R}$-beli művelet (vagyis két olyan függvény, melyek az összes valós számpárok halmazát a valós számok halmazába képezik), a szokásos módon jelölt összeadás és szorzás;

egy $\mathbb{R}$-en értelmezett, *kisebb-egyenlő*nek nevezett és a szokásos $\leq$ szimbólummal jelölt reláció.

Az axiómák első csoportjához tartozó kilenc axióma a műveletek alaptulajdonságait foglalja össze:

1. axióma (az összeadás asszociatív). *Bármely x, y, z valós számokra $(x+y)+z = x+(y+z)$.*

2. axióma (a 0 neutrális elem az összeadásre nézve). *Bármely x valós számra $x+0 = x$.*

3. axióma (ellentett létezése). *Bármely x valós számhoz található olyan u valós szám, melyre $x+u = 0$.*

4. axióma (az összeadás kommutatív). *Bármely x, y valós számokra $x+y = y+x$.*

5. axióma (a szorzás asszociatív). *Bármely x, y, z valós számokra $(xy)z = x(yz)$.*

6. axióma (az 1 neutrális elem a szorzásra nézve). *Bármely x valós számra $x \cdot 1 = x$.*

7. axióma (reciprok létezése). *Bármely nullától különböző x valós számhoz található olyan u valós szám, melyre $x \cdot u = 1$.*

8. axióma (a szorzás kommutatív). *Bármely x, y valós számokra $xy = yx$.*

9. axióma (a szorzás disztributív az összeadásra nézve). *Bármely x, y, z valós számokra $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.*

Az axiómák második csoportja a $\leq$ reláció alapvető tulajdonságait rögzíti:

10. axióma (a $\leq$ reláció reflexív). *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$.*

11. axióma (a $\leq$ reláció trichotom). *Bármely két* különböző *$x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ valós számot véve, az $x \leq y$ és $y \leq x$ állítások közül pontosan egy igaz.*

12. axióma (a $\leq$ reláció tranzitív). *ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$.*

13. axióma (a $\leq$ reláció és az összeadás kapcsolata). *Bármely x, y, z valós számokra teljesül az, hogy ha $x \leq y$, akkor $x+z \leq y+z$.*

14. axióma (a $\leq$ reláció és a szorzás kapcsolata). *Bármely x, y, z valós számokra teljesül az, hogy ha $x \leq y$ és $0 \leq z$, akkor $x \cdot z \leq y \cdot z$.*

Mielőtt az axiómák harmadik csoportját, az utolsó két axiómát ismeretnénk, hosszabb kitérőt teszünk.

Megjegyezzük, hogy ha most nem folytatnánk az axiómarendszert, akkor a *rendezett test* axiómarendszerét kapnánk, továbbá hogy ha csak az első kilenc axiómát vennénk (és persze a $\leq$ relációt, mint alapfogalmat elhagynánk), akkor a *test* algebrai fogalmának axiómarendszerét kapnánk.

Az összes ismert számolási szabály levezethető az eddigi axiómákból. Mi példaként ezt az egyet bizonyítjuk:

1.11. Állítás. *Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla.*

Bizonyítás. Legyen először a tetszőleges valós szám és y olyan valós szám, amelyre $0 \cdot a + y = 0$ (a 3. axióma szerint ilyen szám létezik), ekkor – az egyes axiómákra röviden csak a sorszámukkal utalva –

$$0 \cdot a \overset{2.}{=} (0+0) \cdot a \overset{9.}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a,$$

mindkét oldalhoz hozzáadva az y számot, majd újra felhasználva a most bizonyított formulát:

$$0 = 0 \cdot a + y = [0 \cdot a + 0 \cdot a] + y \overset{1.}{=} 0 \cdot a + [0 \cdot a + y] \overset{y \text{ def}}{=} 0 \cdot a + 0 \overset{2.}{=} 0 \cdot a.$$

Tegyük fel most, hogy az a és b valós számok szorzata nulla, $a \neq 0$, és c olyan valós szám, amelyre $a \cdot c = 1$. Ekkor

$$b \overset{6.}{=} b \cdot 1 \overset{8.}{=} 1 \cdot b \overset{c \text{ def}}{=} (a \cdot c) \cdot b \overset{8.}{=} (c \cdot a) \cdot b \overset{5.}{=} c \cdot (a \cdot b) = c \cdot 0 \overset{8.}{=} 0 \cdot c = 0,$$

az utolsó lépésben a bizonyítás első felében már igazolt állítást használtuk fel. $\square$

Kiemeljük a számfogalom felépítésének egy érdekes mozzanatát: hogyan lehet definiálni az axiomatikus felépítésben a pozitív egész számok halmazát.

1.12. Definíció (induktív számhalmaz). *Nevezzük a valós számok halmazának egy X részhalmazát* induktív*nak, ha egyrészt $1 \in X$, másrészt minden valós x számra érvényes a következő implikáció: ha $x \in X$, akkor $x + 1 \in X$.*

Jegyezzük meg, hogy létezik induktív számhalmaz, például maga az $\mathbb{R}$ ilyen. Ezek után a definíció:

1.13. Definíció (a pozitív egész számok halmaza). *A pozitív egész számok halmaza az induktív számhalmazok közös része (metszete), vagyis azoknak a valós számoknak a halmaza, amelyek benne vannak mindegyik induktív halmazban.*

Ebből a definícióból könnyen következik, hogy a pozitív egész számok halmaza maga is induktív halmaz, továbbá részhalmaza akármelyik induktív halmaznak, vagyis a pozitív egész számok halmaza a legszűkebb induktív halmaz. A teljes indukcióval történő bizonyítás módszerének helyessége egyszerűen bizonyítható arra a tényre támaszkodva, hogy a pozitív egészek halmaza részhalmaza akármelyik induktív számhalmaznak. A *teljes indukciós bizonyítás*ok során ugyanis valójában a $\mathbb{Z}^+$ halmaznak valamely S részhalmazáról mutatjuk meg, hogy egyenlő az egész $\mathbb{Z}^+$ halmazzal, éspedig úgy mutatjuk meg, hogy igazoljuk az S halmaz induktív voltát: egyrészt azt, hogy $1 \in S$, másrészt minden pozitív egész n-re az $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$ implikáció igaz voltát, s ezáltal azt, hogy $\mathbb{Z}^+ \subset S$ ($S \subset \mathbb{Z}^+$ miatt valóban elegendő a pozitív egész n számokra igazolni a fenti implikációt, hiszen $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^+$ esetén ennek előtagja hamis, így az implikáció ilyenkor automatikusan igaz). Konkrétabban: teljes indukciót a „minden pozitív egész n esetén $T(n)$” szerkezetű állítások bizonyítására lehet alkalmazni ($T(n)$ olyan állítás, amely n-ről állít valamit, azaz: T a pozitív egészek halmazán értelmezett tulajdonság, vagy nyitott mondat), ekkor az S halmazt azoknak az n pozitív egész számoknak a halmazaként lehet értelmezni, amelyekre a $T(n)$ állítás igaz.

1.14. Tétel (módosított teljes indukció). *Egy $S \subset \mathbb{Z}^+$ halmaz pontosan akkor egyenlő az összes pozitív egész számok halmazával, ha (a) $1 \in S$ és (b) minden pozitív egész n-re abból, hogy $\overline{1,n} \subset S$, következik az, hogy $n+1 \in S$.*

Bizonyítás. Az teljesen nyilvánvaló, hogy ha $S = \mathbb{Z}^+$, akkor (a) is, (b) is teljesül. Megfordítva: ha (a) is, (b) is teljesül, akkor S-nek már az

$$X := \{n \in \mathbb{Z}^+ : \overline{1,n} \subset S\}$$

részhalmaza is induktív, s emiatt egyenlő az összes pozitív egész számok halmazával: egyrészt $\overline{1,1} = \{1\}$ és (a) miatt $1 \in X$, másrészt $\overline{1,n} \cup \{n+1\} = \overline{1,n+1}$ (ami egy precíz felépítésben külön bizonyítást igényelne) és (b) miatt minden pozitív egész n-re $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$. $\square$

1.15. Megjegyzés. *Mind az eredeti, mind a módosított teljes indukciónak van olyan változata is, amelyben az 1 szám kitüntetett szerepét egy m egész szám veszi át (ez legtöbbször a 0). Ekkor tehát arról van szó, hogy az m-nél nem kisebb egész számok halmazának egy S' részhalmaza mikor egyenlő az összes m-nél nem kisebb egész számok halmazával; és ami az ehhez (szükséges és) elegendő feltételpárokat illeti, a teljes indukcióhoz és a módosított teljes indukcióhoz képest csupán annyit változik a helyzet, hogy az „$1 \in S$" feltétel helyére az „$m \in S$" feltétel és az $\overline{1,n}$ halmaz helyére az $\overline{m,n}$ halmaz lép. A teljes indukciós bizonyítások ezen változatainak helyessége egyszerűen abból következik, hogy egy S halmaz pontosan akkor teljesíti a megváltoztatott ($m \neq 1$-hez tartozó) feltételpárok egyikét, ha az*

$$S - \{m-1\} := \{k - m + 1\}_{k \in S}$$

halmaz teljesíti a megfelelő, $m = 1$-hez tartozó feltételpárt.

A teljes indukciós bizonyítások témájához szorosan kapcsolódik az úgynevezett rekurzív definíciók témája, pontosabban: sorozatok (a pozitív egészek halmazán értelmezett függvények) rekurzióval történő definiálásának kérdése. Azt, hogy mit jelent a rekurzív definíció, hétköznapi nyelven így lehet megfogalmazni: egy sorozat rekurzióval történő értelmezéséhez meg kell adni egyrészt a sorozat első tagját, másrészt minden pozitív egész n-hez egy olyan képzési szabályt (függvényt), amelynek segítségével a sorozat első n tagjából előállítható a sorozat $n+1$-edik tagja. A legegyszerűbb – és leggyakrabban használt – esetben az $n+1$-edik tag előállításához valójában csak az n-edik tagot kell felhasználni. Ezen belül is a legegyszerűbb esetnek számít az, amikor ennek az előállításnak a módja nem függ az n értékétől, vagyis amikor adott egy nemüres X halmaz, továbbá egy az X halmazt önmagába képező f függvény, és az (x_n) sorozatot úgy adjuk meg, hogy egyrészt megadjuk valahogyan az x_1 első tagot az X halmazban, majd azt mondjuk, hogy minden pozitív egész n-re x_{n+1} legyen egyenlő $f(x_n)$-nel. Például: $x_1 := 2$; minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $x_{n+1} := x_n/2 + 1/x_n$ (itt $X = \mathbb{R}^+$, és az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény minden egyes t pozitív számhoz a $t/2 + 1/t$ számot rendeli). Nem sokkal bonyolultabb az az eset sem, amikor x_{n+1} előállításához csak x_n-re, és – az 1-nél nagyobb n egészek esetén – x_{n-1}-re van szükség. Ezen belül megint van egy legegyszerűbbnek tekinthető eset, amikor adott egy nemüres X halmaz és egy $g : X \times X \to X$ függvény; megadjuk valahogyan az X halmazban a sorozat első két tagját, majd azt mondjuk, hogy legyen minden 1-nél nagyobb n esetén $x_{n+1} := g(x_{n-1}, x_n)$. Például a nevezetes Fibonacci-féle sorozatnak ez a definíciója: $x_1 := x_2 := 1$; minden 1-nél nagyobb n egész esetén $x_{n+1} := x_{n-1} + x_n$ (itt X választható az összes valós számok halmazának, g pedig az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ függvénynek, vagyis az összeadásnak).

Visszatérve a valós számok axiómarendszeréhez, most már meg tudjuk fogalmazni a harmadik axiómacsoportot, az utolsó két axiómát.

15. axióma (Arkhimédész-i axióma). *Nincs olyan y valós szám, melyre minden n pozitív egész esetén $n \leq y$ teljesülne.*

16. axióma (Cantor-axióma). *Ha* $([a_n, b_n])$ *nemelfajuló zárt intrvallumok olyan sorozata, melyre minden pozitív egész* n *esetén* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, *akkor van olyan* c *valós szám, amely az* $[a_n, b_n]$ *intervallumok mindegyikében benne van.*

1.16. Definíció. *Az olyan* (H_n) *halmazsorozatot, melyre minden pozitív egész* n *esetén* $H_{n+1} \subset H_n$, *tartalmazásra nézve monoton fogyónak nevezzük.*

A Cantor-axióma tehát olyan – nemelfajuló zárt intervallumokból álló – intervallumsorozatról szólt, amely tartalmazásra nézve monoton fogyó. A Cantor-axiómát nyilván úgy is lehet fogalmazni, hogy ha az (a_n), (b_n) sorozatokra minden pozitív egész n esetén $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, akkor van olyan c valós szám, melyre minden pozitív egész n esetén $a_n \leq c \leq b_n$.

Az Arkhimédész-i axiómához szorosan kapcsolódik egy definíció, kevésbé szorosan egy tétel, a Cantor-axiómához pedig a Cantor-féle közösponttétel:

1.17. Definíció (felülről, illetve alulról korlátos számhalmaz). *Az* y *valós számot a* H *számhalmaz felső korlátjának nevezzük, ha minden* $x \in H$ *esetén* $x \leq y$; *a* H *számhalmazt felülről korlátosnak nevezzük, ha van felső korlátja. Az* y *valós számot a* H *számhalmaz alsó korlátjának nevezzük, ha minden* $x \in H$ *esetén* $y \leq x$; *a* H *számhalmazt alulról korlátosnak nevezzük, ha van alsó korlátja. Ha egy* H *számhalmaz alulról is és felülről is korlátos, akkor korlátosnak nevezzük.*

E definíció értelmében az Arkhimédész-i axióma pontosan azt állította, hogy a pozitív egész számok halmaza felülről nem korlátos.

1.18. Megjegyzés. *Egy* $H \subset \mathbb{R}$ *számhalmaz pontosan akkor korlátos, ha van olyan nemnegatív* K *szám, amelyre minden* $x \in H$ *esetén* $|x| \leq K$. *Itt a „nemnegatív" szó helyettesíthető a „pozitív" szóval is.*

Bizonyítás vázlata. Valóban, egyrészt, ha van ilyen K szám, akkor K felső, és $-K$ alsó korlátja a H számhalmaznak, másrészt, ha A alsó és B felső korlátja a H számhalmaznak, akkor a $\max\{|A|, |B|\}$ szám megfelel a K szerepére. $\square$

1.19. Tétel. *Minden nyílt intervallumban van racionális szám is, és irracionális szám is.*

Bizonyítás. Elég az első állítással foglalkoznunk, hiszen abból könnyen következik a második: ha $r \in \mathbb{Q} \cap (a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$, akkor $r\sqrt{2}$ (a, b)-beli irracionális szám (szorozzuk be a $a/\sqrt{2} < r < b/\sqrt{2}$) egyenlőtlenségeket $\sqrt{2}$-vel). Legyen (a, b) nyílt intervallum, bizonyítjuk, hogy $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

I) Tegyük fel először, hogy $0 \leq a < b$ és legyen m $1/(b-a)$-nál nagyobb pozitív egész (az Arkhimédész-i axióma szerint van ilyen), tehát olyan m pozitív egész, melyre $1/m < b - a \leq b$ (most használtuk ki azt, hogy $a \geq 0$). Az

$$S := \{k \in \mathbb{Z}^+ \,:\, \frac{k}{m} < b\}$$

halmaz nem lehet induktív, hiszen akkor (minthogy $1 \in S$) $S = \mathbb{Z}^+$ volna, tehát a bm szám felső korlátja volna a pozitív egészek halmazának. Ezért van olyan pozitív egész k, amelyre $k/m < b \leq (k+1)/m$, következésképp $k/m \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, hiszen

$$\frac{k}{m} \geq b - \frac{1}{m} > b - (b - a) = a.$$

II) Ha $a < b \leq 0$ és $r \in (-b, -a) \cap \mathbb{Q}$, akkor $-r \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$.

III) Ha $a < 0 < b$, akkor – ismét az I) részben bizonyítottak szerint – $(0, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. $\square$

1.20. Tétel (Cantor-féle közösponttétel). *Ha az* $([a_n, b_n])$ *intervallumsorozat tartalmazásra nézve monoton fogyó, továbbá minden pozitív p számhoz található olyan pozitív egész n, melyre* $b_n - a_n < p$, *akkor* pontosan egy *olyan c valós szám található, melyre minden pozitív egész n esetén* $a_n \le c \le b_n$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van két különböző olyan valós szám, mely az $[a_n, b_n]$ intervallumok mindegyikében benne van. A kisebbiket x-szel, a nagyobbikat y-nal jelölve, minden n pozitív egész esetén

$$b_n - a_n \ge y - a_n \ge y - x \in \mathbb{R}^+,$$

tehát a tételben megfogalmazott második feltétel nem teljesül. Ha az intervallumok között nincs elfajuló, akkor legalább egy közös pont létezését a Cantor-axióma biztosítja, ha pedig valamely pozitív egész m esetén $a_m = b_m$, akkor $c := a_m$ nyilván (az egyetlen) közös pont. □

1.4. Néhány nevezetes egyenlőtlenség

1.21. Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Ha n 1-nél nagyobb egész és* $1 \ne x > -1$, *akkor* $x^n > 1 + n(x-1)$.

Bizonyítás. A mértani sorozat összegképlete szerint $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \ldots + x^{n-1})$, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy az $A := 1 + x + \ldots + x^{n-1}$ összeg $x > 1$ esetén nagyobb, mint n, $x \in (-1, 1)$ esetén pedig kisebb, mint n. Ha $x > 1$, akkor az $x, \ldots, x^{n-1}$ számok mindegyike 1-nél nagyobb, ezért ilyenkor az n tagú $A = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$ összeg nagyobb, mint n. Ha $x \in (-1, 1)$, akkor minden n-nél kisebb pozitív egész k esetén $x^k \le |x^k| < 1$, ezért ilyenkor, lévén A olyan $n(> 1)$ tagú összeg, amelynek egyik tagja 1, a többi kisebb, mint 1, $A < n$. □

1.22. Megjegyzés. *Annak a kérdésnek a vizsgálatára, hogy további* (n, x) *párok esetén milyen előjelű az* $x^n - [1 + n(x-1)]$ *szám, a konvex függvények tárgyalása során fogunk tudni visszatérni.*

1.23. Tétel (általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség). *Ha n 1-nél nagyobb egész szám és a* t_1, $t_2, \ldots, t_n$ *számokra teljesül az, hogy vagy mindegyikük a* $(-2, -1]$, *vagy mindegyikük a* $[-1, 0)$, *vagy mindegyikük a* $(0, +\infty)$ *intervallumban van, akkor az* $1+t_1$, $1+t_2, \ldots, 1+t_n$ *számok szorzata nagyobb, mint* $1 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$.

Bizonyítás. I) Tegyük fel először azt, hogy a t_k számok mindegyike a $(-2, -1]$ intervallumban van. Ekkor az $1+t_k$ számok mindegyike a $(-1, 0]$ intervallumban van, emiatt ezek szorzata a $(-1, 1)$ intervallumban van, miközben

$$1 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n \le 1 - n \le 1 - 2 = -1.$$

II) Még egyszerűbb a helyzet akkor, ha a t_k számok közül legalább az egyik -1, és mindnyájan negatívak: ekkor az $1 + t_k$ számok szorzata nulla, míg az $1 + t_1 + \ldots + t_n$ összeg negatív.
III) Tegyük fel most, hogy a t_k számok azonos előjelűek, nullától különbözők, és mindegyikük nagyobb, mint -1. Alkalmazzunk n szerinti teljes indukciót (lásd az 1.15. Megjegyzést, $m := 2$). $n = 2$ esetén a feltételeinkből kifolyólag $t_1 t_2 > 0$, emiatt $(1 + t_1)(1 + t_2) = 1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2 > 1 + t_1 + t_2$. Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy a $t_1, \ldots, t_{n+1}$ számok közül vagy mindegyik a $(-1, 0)$, vagy mindegyik a $(0, +\infty)$ intervallumban van. Alkalmazzuk az indukciós feltételt a $t_1, \ldots, t_n$ számokra:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + t_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} t_k,$$

mindkét oldalt szorozzuk be $1+t_{n+1}$-gyel:

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+t_k) > (1+t_{n+1})\left(1+\sum_{k=1}^{n} t_k\right) = 1+\sum_{k=1}^{n+1} t_k + \sum_{k=1}^{n} t_{n+1}t_k > 1+\sum_{k=1}^{n+1} t_k.$$

□

1.24. Definíció (számtani közép, mértani közép). *Tetszőleges pozitív egész* n *esetén az* $x_1,\ldots,x_n$ *valós számok számtani közepén az*

$$A_n(x_1,\ldots,x_n) := \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$$

számot, míg a nemnegatív $a_1,\ldots,a_n$ *számok mértani közepén az*

$$G_n(a_1,\ldots,a_n) := \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

számot értjük.

1.25. Tétel (a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség). *Bármely pozitív egész* n*, és bármely nemnegatív* $a_1,\ldots,a_n$ *számok esetén* $G_n(a_1,\ldots,a_n) \le A_n(a_1,\ldots,a_n)$*. Itt a* $\le$ *jel helyére pontosan attól függően lehet a* $<$*, illetve az* $=$ *jelet tenni, hogy az* $a_1,\ldots,a_n$ *számok között van-e két különböző, vagy nincs.*

Bizonyítás. Ha a $a_1,\ldots,a_n$ számok között nincs két különböző, vagyis ha mindegyikük egyenlő ugyanazzal az A számmal, akkor mind a mértani, mind a számtani közepük szintén A-val egyenlő. Ezért a továbbiakban elég azt bizonyítani, hogy ha az $a_1,\ldots,a_n$ számok között van két különböző, akkor a mértani közepük kisebb, mint a számtani. Sőt, eközben azt is feltehetjük, hogy az $a_1,\ldots,a_n$ számok mindegyike pozitív, ellenkező esetben ugyanis nyilvánvaló, hogy a mértani közép nulla, a számtani közép pedig pozitív. Teljes indukciót alkalmazunk. $n=1$ esetén az állítás nyilvánvaló (továbbá az $n=2$ eset közismert a középiskolából). Az indukciós lépés tárgyalása céljából az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a pozitív számokból álló $(a_1,\ldots,a_n,a_{n+1})$ sorozat tagjai között fennállnak az $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le a_{n+1}$ egyenlőtlenségek (az a_k számok sorrendjének megváltoztatása sem a számtani, sem a mértani közepet nem változtatja meg). Megjegyezzük, hogy ekkor szükségképpen fennáll az

$$S := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k < a_{n+1}$$

egyenlőtlenség. Valóban, minthogy az a_k számok között van két különböző ($k\in\overline{1,n+1}$), a nemnegatív $a_{n+1}-a_k$ számok közül nem lehet mindegyik nulla, ezért

$$0 < \sum_{k=1}^{n}(a_{n+1}-a_k) = na_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

ennek egyszerű átrendezésével kaphatjuk az előző kiemelt formulát. Az $a_1,\ldots,a_{n+1}$ számtani közepének $n+1$-edik hatványát fogjuk alulról becsülni, ehhez ezt a számtani közepet S segítségével fejezzük ki:

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{nS+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left[S\left(\frac{n}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{(n+1)S}\right)\right]^{n+1} =$$

$$S^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{(n+1)S}\right)^{n+1}=S^{n+1}\left(1+\frac{a_{n+1}-S}{S(n+1)}\right)^{n+1}\overset{1.21}{>}$$

$$\overset{1.21}{>}S^{n+1}\left(1+\frac{a_{n+1}-S}{S}\right)=S^n a_{n+1}\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n+1},$$

az utolsó egyenlőtlenség az $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ esetben nyilvánvaló, ha pedig az $a_1, \ldots, a_n$ számok között van két különböző, akkor az indukciós feltevésből következik. □

1.26. Definíció (harmonikus közép). *A pozitív $a_1, \ldots, a_n$ számok harmonikus közepén a reciprokaik számtani közepének reciprokát, vagyis az*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=:H_n(a_1,\ldots,a_n)$$

számot értjük.

1.27. Tétel (a mértani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenség). *Bármely pozitív egész n, és bármely $p_1, \ldots, p_n$ pozitív számok esetén $H_n(p_1, \ldots, p_n) \leq G_n(p_1, \ldots, p_n)$; itt a $\leq$ jel helyett attól függően lehet a $<$, illetve az $=$ jelet tenni, hogy az $p_1, \ldots, p_n$ között van-e két különböző, vagy nincs.*

Bizonyítás. Az az eset most is nyilvánvaló, amikor az $p_1, \ldots, p_n$ számok között nincs két különböző. A másik esetben a bizonyítandó szigorú egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy mértani közép reciproka kisebb, mint a harmonikus közép reciproka. Ez viszont az előző tételből következik, ha azt az $p_1, \ldots, p_n$ számok reciprokaira alkalmazzuk. □

1.28. Tétel (A Cauchy – Schwarz-féle egyenlőtlenség). *Tetszőleges pozitív egész n és tetszőleges valós $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ számok esetén*

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2}.$$

Bizonyítás. Lásd a gyakorlatokat. □

1.5. Még egyszer a harmadik axiómacsoportról

A Cantor-féle közösponttétel második feltételét úgy is lehet fogalmazni, hogy a $\{b_n - a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ számhalmaznak nincs pozitív alsó korlátja. Sőt, minthogy a 0 szám nyilván alsó korlátja ennek a számhalmaznak, ehelyett azt is mondhatjuk, hogy a 0 szám a *legnagyobb* alsó korlátja ennek a számhalmaznak (megjegyezzük, hogy a sorozathatárérték fogalmának bevezetését és a monoton sorozatok határértékéről szóló tétel bizonyítását követően lehetőség nyílik majd egy újabb átfogalmazásra).

1.29. Definíció (számhalmaz alsó (felső) határa). *Ha az y szám a H számhalmaz legnagyobb alsó korlátja, akkor azt is mondjuk, hogy y a H számhalmaz alsó* határa, *vagy azt is, hogy y a H számhalmaz* infimuma. *Ha az y szám a H számhalmaz legkisebb felső korlátja, akkor azt is mondjuk, hogy y a H számhalmaz felső* határa, *vagy azt is, hogy y a H számhalmaz* szuprémuma. *A H számhalmaz legnagyobb alsó korlátjára az* $\inf H$, *legkisebb felső korlátjára a* $\sup H$ *jelölést használjuk.*

A következő tételből ki fog derülni, hogy minden nemüres, alulról korlátos számhalmaznak van alsó határa, és minden nemüres, felülről korlátos halmazak van felső határa. Talán érdemes – a definíciót kissé átfogalmazva – leszögezni, hogy a H számhalmaz alsó határát két dolog jellemzi: egyrészt minden $x \in H$ esetén $\inf H \leq x$, másrészt ha a z szám nagyobb, mint $\inf H$, akkor található nála kisebb H-beli elem. Hasonlóképpen a H számhalmaz felső határát is két dolog jellemzi: egyrészt minden $x \in H$ esetén $x \leq \sup H$, másrészt ha a z szám kisebb, mint $\sup H$, akkor található nála nagyobb H-beli elem. A most bevezetett fogalmakkal kapcsolatban lássunk két példát.

1.30. Példa. $\inf\{1/n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = 0$. *Valóban, egyrészt minden pozitív (egész) szám reciproka pozitív, így a* 0 *szám alsó korlátja ennek a számhalmaznak, s ha nem a* 0 *lenne a legnagyobb alsó korlát, vagyis ha egy* p *pozitív szám is alsó korlát lenne, azaz minden pozitív egész* n *esetén* $p \leq 1/n$ *lenne, akkor ezen egyenlőtlenség átrendezésével arra a következtetésre juthatnánk, hogy az* $1/p$ *szám felső korlátja lenne a pozitív egész számok halmazának*

1.31. Példa. *Minden* $q \in (0,1)$ *és* $c \in \mathbb{R}^+$ *esetén* $\inf\{c \cdot q^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = 0$. *A* 0 *szám ennek a számhalmaznak is nyilvánvalóan alsó korlátja, így most is ellentmondásra próbálunk jutni abból a feltételezésből, hogy valamely* p *pozitív szám is alsó korlátja ennek a számhalmaznak. Ebből a feltételezésből, és a Bernoulli-egyenlőtlenségből következik, hogy minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén*

$$p \leq cq^n = \frac{c}{(1/q)^n} \leq \frac{c}{1 + n \cdot (1/q - 1)},$$

következésképpen minden n*-re*

$$n \leq \frac{q}{1-q} \cdot \left(\frac{c}{p} - 1\right)$$

lenne, ami ellentmondana az Arkhimédész-i axiómának.

1.32. Megjegyzés. *Az utóbbi példa többek között azért fontos, mert sok konkrét esetben megalapozza a Cantor-féle közösponttétel alkalmazását. Nevezetesen olyankor, amikor minden* n *esetén* $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ *(ez a helyzet például az úgynevezett „felezéses” eljárással készített intervallumsorozatok esetén, azaz ha minden* n*-re az* $n+1$*-edik intervallum egyik végpontja az* n*-edik intervallum középpontja, a másik pedig megegyezik az* n*-edik intervallum egyik végpontjával). Ekkor ugyanis az intervallumhosszúságok* $(b_n - a_n)$ *sorozata megegyezik azzal a* $(c \cdot q^n)$ *alakú (mértani) sorozattal, ahol* $c = 2(b_1 - a_1)$ *és* $q = 1/2 \in (0,1)$*, így az intervallumhosszúságok halmazának alsó határa nulla.*

1.33. Tétel. *Ha a fenti harmadik axiómacsoportot kicseréljük az alábbi négy állítás akármelyikére, az eredetivel egyenérékű axiómarendszert kapunk.*
1. Bármely nemüres, alulról korlátos számhalmaznak van legnagyobb alsó korlátja.
2. Ha A *és* B *olyan nemüres számhalmazok, melyekre minden* $(a,b) \in A \times B$ *esetén* $a \leq b$*, akkor van olyan* c *valós szám, melyre minden* $(a,b) \in A \times B$ *esetén* $a \leq c \leq b$*.*
3. Ha A *és* B *olyan nemüres számhalmazok, melyekre minden* $(a,b) \in A \times B$ *esetén* $a < b$ *és* $A \cup B = \mathbb{R}$*, akkor van olyan* c *valós szám, melyre minden* $(a,b) \in A \times B$ *esetén* $a \leq c \leq b$*.*
4. Bármely nemüres, felülről korlátos számhalmaznak van legkisebb felső korlátja.

Bizonyítás. 5. állításnak nevezve azt, hogy $\mathbb{R}$ ben teljesül a Cantor-axióma és az Arkhimédész-i axióma, elegendő a következő öt implikációt bizonyítani: 1.⇒2., 2.⇒3., 3.⇒4., 4.⇒5., 5.⇒1. (persze az előtaghoz mindenütt hozzá kell kapcsolni egy „és” kötőszóval az első két axiómacsoport axiómáit).
1.⇒2. A 2. állításban olyan A, B halmazokról van szó, amelyekre A minden eleme alsó korlátja B-nek, ezért B legnagyobb alsó korlátja olyan c valós szám, amely egyszersmind felső korlátja az A halmaznak.

2.⇒3. Nyilvánvaló.
3.⇒4. Legyen H nemüres, felülről korlátos számhalmaz, Jelölje B a H halmaz felső korlátainak halmazát és legyen $A := \mathbb{R} \setminus B$. A $\leq$ reláció tranzitív volta miatt a H halmaz egy felső korlátjánál nem kisebb szám maga is felső korlátja H-nak, emiatt tetszőleges $a \in A$, $b \in B$ elemekre csakis az $a < b$ egyenlőtlenség teljesülhet. A 3. állítás szerint van olyan c valós szám, amelyre minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $a \leq c \leq b$. Ha létezne egy c-nél nagyobb H-beli h elem, akkor – minthogy a h-nál kisebb számok nem lehetnek felső korlátai H-nak – a (c, h) intervallum elemei c-nél nagyobb A-beli elemek lennének, márpedig ilyenek nincsenek. Tehát c felső korlátja H-nak, továbbá minden $b \in B$ esetén $c \leq b$, ami éppen azt jelenti, hogy c az H halmaz legkisebb felső korlátja.
4.⇒5. Legyen $([a_n, b_n])$ zárt intervallumokból álló, tartalmazásra nézve monoton fogyó intervallumsorozat és jelölje H az (a_n) sorozat értékkészletét. Minden pozitív egész k és l esetén $a_k \leq b_l$, azaz a (b_n) sorozat minden tagja felső korlátja a H halmaznak, hiszen $m := \max\{k, l\}$ esetén $a_k \leq a_m \leq b_m \leq b_l$. Ebből következik, hogy a H halmaz legkisebb felső korlátja benne van az $[a_n, b_n]$ intervallumok mindegyikében. Áttérve az Arkhimédész-i axiómára, ha a pozitív egészek halmaza felülről korlátos volna, akkor volna legkisebb felső korlátja, ezt α-val jelölve, $\alpha - 1 < \alpha$ miatt $\alpha - 1$ már nem volna felső korlátja a pozitív egészek halmazának. Emiatt létezne olyan n pozitív egész, amelyre $\alpha - 1 < n \leq \alpha$ volna, következésképpen $n + 1 > \alpha$ volna, ami ellentmondana α felső korlát voltának.
5.⇒1. Legyen H alulról korlátos nemüres számhalmaz. Rekurzióval – felezéses eljárással – értelmezünk egy olyan $([a_n, b_n])$ intervallumsorozatot, amely teljesíti a Cantor-féle közösponttétel feltételeit. Legyen a_1 a H halmaz tetszőleges alsó korlátja, b_1 pedig tetszőleges olyan valós szám, amely *nem* alsó korlátja H-nak, azaz nagyobb a H halmaz valamely eleménél (következésképp $a_n < b_n$). Ha egy pozitív egész n-re már értelmeztük az a_n, b_n számokat, éspedig úgy, hogy egyrészt $a_n < b_n$ legyen, másrészt a_n alsó korlátja H-nak, b_n pedig nem alsó korlátja H-nak, akkor – bevezetve a $c_n := (a_n + b_n)/2$ jelölést – legyen

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := [c_n, b_n], \qquad \text{illetve} \qquad [a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, c_n]$$

attól függően, hogy c_n alsó korlátja, illetve nem alsó korlátja H-nak. Evidens, hogy minden n-re $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, továbbá a 1.32. Megjegyzés szerint $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{Z}^+\} = 0$, tehát alkalmazható a Cantor-féle közösponttétel. Jelölje u az $[a_n, b_n]$ intervallumok egyetlen közös pontját; megmutatjuk, hogy $u = \inf H$. u alsó korlátja H-nak, ugyanis ha nem ez lenne a helyzet, akkor volna olyan p pozitív szám, melyre $u - p \in H$, ehhez a p-hez lehetne találni olyan pozitív egész n-t, amelyre $b_n - a_n < p$, következésképp $u - p \leq b_n - p < a_n$ is teljesülne, ami ellentmondana annak, hogy a_n alsó korlátja H-nak. Ha valamely pozitív p szám mellett $u + p$ is alsó korlátja lenne H-nak, akkor ismét választva egy a $b_n - a_n < p$ feltételnek eleget tevő pozitív egész n-t, azt kapnánk, hogy b_n is alsó korlátja H-nak, hiszen kisebb lenne H egy alsó korlátjánál: $b_n < a_n + p \leq u + p$. □

1.34. Definíció. *Az előző tételben szereplő 1., 4., 3. állítást rendre* alsóhatár-axiómának, felsőhatár-axiómának, *illetve* Dedekind-axiómának *nevezzük, a 2. állításra pedig „módosított Dedekind-axióma” néven fogunk hivatkozni.*

1.35. Megjegyzés. *Ha az A, B számhalmazok és a c szám a módosított Dedekind-axiómában leírt kapcsolatban állnak egymással, akkor azt mondjuk,hogy a c szám elválasztja az A és B halmazokat. Ezeket az elválasztó elemeket az jellemzi, hogy felső korlátjuk A-nak és alsó korlátjuk B-nek, ezért ha a nemüres A, B számhalmazokra teljesül az, hogy minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $a \leq b$, akkor az elválasztó elemek halmaza azonos a(z esetleg elfajuló)* $[\sup A, \inf B]$ *zárt intervallummal. Az ilyen (A, B) halmazpárok esetén annak szükséges és elégséges feltétele, hogy* egyetlen *elválasztó elem tartozzék hozzájuk (vagyis annak, hogy a* $[\sup A, \inf B]$ *intervallum elfajuló legyen), az, hogy* *minden pozitív p számhoz létezzék a $b - a < p$ feltételnek eleget tevő $(a, b) \in A \times B$ elempár. Valóban, egyrészt ha $\sup A = \inf B =: y$, akkor $y - p/2$ nem felső korlátja A-nak és $y + p/2$ nem alsó korlátja B-nek ezért található $y - p/2$-nél nagyobb A-beli a és $y + p/2$-nél kisebb B-beli b, másrészt ha minden pozitív p-hez található a $b - a < p$ feltételnek eleget tevő $(a, b) \in A \times B$ elempár, akkor az $\inf B - \sup A$ különbség minden pozitív számnál kisebb, tehát csakis nulla lehet: $\inf B - \sup A \leq b - \sup A \leq b - a < p$. Vegyük észre, hogy A és B között ilyen kapcsolat áll fenn például akkor, ha $([a_n, b_n])$ a Cantor-féle közösponttétel feltételeinek eleget tevő intervallumsorozat, A az (a_n) sorozat értékkészlete, B a (b_n) sorozat értékkészlete; az egyetlen elválasztó elem persze ilyenkor az a szám, melyet a közösponttételben is c-vel jelöltünk. Ezek szerint a közösponttétel feltételeinek eleget tevő $([a_n, b_n])$ intervallumsorozat esetén ezen intervallumok egyetlen közös eleme egyenlő az (a_n) sorozat értékkészletének felső határával is, és a (b_n) sorozat értékkészletének alsó határával is.*

Most egy fontos példát mutatunk olyan intervallumsorozatra, amely eleget tesz a Cantor-féle közösponttétel feltételeinek:

1.36. Állítás. *Az az $([a_n, b_n])$ intervallumsorozat, melyet az*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \qquad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

egyenlőségekkel értelmezünk, eleget tesz a Cantor-féle közösponttétel feltételeinek.

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy minden n pozitív egészre $a_n < a_{n+1}$ és $b_n > b_{n+1}$ (vagyis (a_n) szigorúan monoton növő, (b_n) szigorúan monoton fogyó). Az előbbi egyenlőtlenség mindkét oldalából $n+1$-edik gyököt vonva, az utóbbinak mindkét oldalából pedig $n+2$-edik gyököt vonva azt kapjuk, hogy elég ezeket bizonyítanunk:

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} < \frac{n+2}{n+1} < \sqrt[n+2]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}.$$

Itt az első egyenlőtlenséget megkapjuk, ha felírjuk az $n+1$ tagú

$$\left(1, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{n+1}{n}\right)$$

sorozatra a mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenséget, a második egyenlőtlenség bizonyítása céljából pedig elegendő, ha az $n+2$ tagú

$$\left(1, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{n+1}{n}\right)$$

sorozatra írjuk fel a harmonikus és mértani közepek közti egyenlőtlenséget, ugyanis egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az előbbi sorozat számtani közepe és az utóbbi sorozat harmonikus közepe egyaránt $(n+2)/(n+1)$-gyel egyenlő. a_n és b_n definíciójából látható, hogy $a_n < b_n$, így az eddigiekből az is következik, hogy mindkét sorozat korlátos: $a_1 = 2$ alsó, $b_1 = 4$ felső korlátja mindkét sorozatnak. Az utóbbi ténynek a felhasználásával megmutatjuk, hogy $\inf\{b_n - a_n\} = 0$. Ha $p > 0$ és n olyan pozitív egész, amelynek reciproka kisebb, mint $p/4$, akkor

$$b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] < 4 \cdot \frac{1}{n} < p.$$

□

1.37. Definíció (az e szám értelmezése). *Az e szám az előző példában szereplő (a_n) sorozat értékkészletének felső határa.*

1.38. Megjegyzés. *Az 1.35. Megjegyzésben és az előző példában mondottak szerint az e szám az egyetlen olyan valós szám, amely minden n-re benne van az*

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$$

intervallumban. Az e szám hat tizedesre kerekített *értéke* $2,718281$.

A Cantor-féle közösponttétel újabb alkalmazásaképpen megmutatjuk, hogy minden pozitív számnak minden 1-nél nagyobb k egész esetén létezik k-adik gyöke.

1.39. Tétel. *Minden* 1*-nél nagyobb k egészhez és p pozitív számhoz található egyetlen olyan q pozitív szám, melyre $q^k = p$.*

Bizonyítás. Az, hogy minden (k, p) párhoz *legfeljebb egy* ilyen q található, könnyen következik abból, hogy pozitív számok közötti egyenlőtlenségeket össze szabad szorozni: ha $0 < q_1 < q_2$, akkor $q_1^k < q_2^k$, ezért nem lehet mindkét k-adik hatvány egyenlő p-vel.
A létezés bizonyítása céljából rekurzív módon, felezéses eljárással, értelmezünk egy olyan $([a_n, b_n])$ intervallumsorozatot, amelyre minden pozitív egész n esetén $a_n^k \le p < b_n^k$, amely sorozat tehát teljesíti a Cantor-féle közösponttétel feltételeit (lásd 1.32-t), ezen intervallumok egyetlen közös pontjaként fogjuk megkapni a keresett q számot. Legyen $a_1 := \min\{1, p\}$ és $b_1 := 2\max\{1, p\}$. Az $a_1 \le 1$ egyenlőtlenség $k-1$ példányát összeszorozva, majd az így kapott egyenlőtlenséget még a_1-gyel beszorozva adódik, hogy $a_1^k \le a_1 \le p$. Hasonlóan, a $b_1 > 1$ egyenlőtlenség $k-1$ példányát összeszorozva, majd az így adódó egyenlőtlenséget b_1-gyel beszorozva kapjuk, hogy $b_1^k > b_1 \ge p$. Ha egy pozitív egészre már értelmeztük az a_n, b_n számokat, éspedig úgy, hogy $a_n^k \le p < b_n^k$ legyen, akkor – bevezetve a $c_n := (a_n + b_n)/2$ jelölést – legyen

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, c_n], \qquad \text{illetve} \qquad [a_{n+1}, b_{n+1}] := [c_n, b_n],$$

éspedig attól függően, hogy $c_n^k > p$, vagy $c_n^k \le p$. Evidens, hogy mindkét esetben $a_{n+1}^k \le p < b_{n+1}^k$, úgyhogy a rekurzív definíciót befejeztük. Az $[a_n, b_n]$ intervallumok egyetlen közös pontját q-val jelölve, igazoljuk, hogy $q^k = p$. Ehhez elég azt bizonyítani, hogy az $([a_n^k, b_n^k])$ intervallumsorozat is teljesíti a Cantor-féle közösponttétel feltételeit, hiszen mind a q^k, mind a p szám benne van ezen intervallumok mindegyikében. Az a_n, b_n számok pozitív voltából következik, hogy az (a_n^k), (b_n^k) sorozatok ugyanolyan értelemben monoton sorozatok, mint az (a_n), illetve a (b_n). Annak bizonyítása céljából, hogy teljesül az $\inf\{a_n^k - b_n^k\} = 0$ feltétel is, legyen p tetszőleges pozitív szám, és n olyan pozitív egész, amelyre $b_n - a_n < p/kb_1^{k-1}$. Ekkor

$$b_n^k - a_n^k = (b_n - a_n)\sum_{i=0}^{k-1} a_n^{k-1-i} b_n^i \le (b_n - a_n)\sum_{i=0}^{k-1} b_n^{k-1-i} b_n^i = (b_n - a_n)\sum_{i=0}^{k-1} b_n^{k-1} \le (b_n - a_n)kb_1^{k-1} < p.$$

□

1.6. Függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak és jelölések

Már eddig is többször felbukkant a függvény fogalma, amelyről az érettségizett diákok többsége úgy gondolja, hogy jól ismeri, mindazonáltal nem lesz haszontalan, ha most egy kicsit elidőzünk a függvényekkel kapcsolatos alapfogalmaknál.

A *hozzárendelés* intuitív fogalmát alapfogalomnak tekintjük, ennek segítségével a *függvény* fogalmát ugyanúgy írjuk körül, ahogy azt a középiskolában szokták tenni: ha X és Y nemüres halmazok, akkor az X halmazt az Y halmazba képező (vivő) függvényen, vagy leképezésen olyan hozzárendelést értünk, amely az X halmaz minden egyes eleméhez az Y halmaz egy-egy elemét rendeli. Azt a tényt, hogy X és Y nemüres halmazok, f pedig olyan függvény, amely az X halmazt az Y halmazba képezi, az

$$f : X \to Y$$

jelsorozattal juttatjuk kifejezésre.

1.40. Definíció. *Ha $f : X \to Y$, akkor az X halmazt a függvény értelmezési tartományának, az Y halmazt a függvény (egyik)* képhalmazának, *az $x \in X$ elemhez a függvény által hozzárendelt Y-beli elemet a függvény x-beli helyettesítési értékének, az összes helyettesítési értékből álló halmazt pedig (amely persze részhalmaza az Y halmaznak), a függvény értékkészletének nevezzük. Ha a függvény értékkészlete egyenlő az Y halmazzal és ezt a tényt hangsúlyozni akarjuk, akkor azt mondjuk, hogy a függvény az X halmazt az Y halmaz**ra** képezi.*

Az f függvény értelmezési tartományának, értékkészletének, illetve egy x helyen vett helyettesítési értékének jelölésére a $D(f)$, $R(f)$, $f(x)$ szimbólumokat használjuk; de az utóbbi helyett előfordul az f_x (például sorozatok esetén), vagy az fx (például a logaritmus- és a trigonometrikus függvények esetén) is. Használni fogjuk az $f : X \supset\!\!\to Y$ jelölést is, ez a következőt jelenti: f olyan függvény, amelyre $D(f) \subset X$ és $R(f) \subset Y$.

Két függvény egyenlőségéhez mindössze két dolog szükséges: a) egyezzen meg az értelmezési tartományuk, b) a közös értelmezési tartomány minden egyes eleméhez az egyik függvény ugyanazt az értéket rendelje hozzá, mint a másik. Egy-egy függvény megadásához tehát két dolgot kell megadnunk: az értelmezési tartományt és a hozzárendelés módját. Ehhez a megjegyzéshez kapcsolódva egy egyszerű példán szemléltetjük, milyen jelöléseket fogunk használni konkrét függvények megadásakor:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2; \quad \text{vagy} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2; \quad \text{vagy} \quad \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2;$$

$$\text{vagy} \quad f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}); \quad \text{vagy} \quad f := (x^2)_{x \in \mathbb{R}}.$$

Néhány szó egy „nemlétező” fogalomról, a szürjektív függvény fogalmáról, illetve a sokak által használt, de általam nem használt „szürjektív” jelzőről.

1.41. Megjegyzés. *Az a kijelentés, hogy az $f : X \to Y$ függvény szürjektív, azt szokta jelenteni, hogy f az X halmazt az Y halmaz**ra** képező függvény. Ezek szerint ha valaki egy f függvényről azt állítja, hogy szürjektív, akkor ezzel azt akarja hallgatója (olvasója) tudomására hozni, hogy mi az értékkészlete az f-nek, bízva abban, hogy a kontextusból kiderül, melyik Y halmazról van szó.*

Tetszőleges nemüres X és Y halmazok esetén Y^X jelölje az X halmazt az Y halmazba képező függvények összességét.

1.42. Definíció (függvény leszűkítései). *Ha $f : X \to Y$ és $\emptyset \neq H \subset X$, akkor az f függvény H-ra való leszűkítésén azt a $f|_H : H \to Y$ függvényt értjük, amelyre minden egyes H-beli x esetén $f|_H(x) = f(x)$. A g függvény leszűkítése az f függvénynek, ha $D(f)$-nek van olyan nemüres H részhalmaza, amelyre $f|_H = g$.*

1.43. Definíció (függvény kiterjesztései). *Az f függvény kiterjesztése a g függvénynek, ha g leszűkítése az f-nek.*

1.44. Definíció (injektív függvény). *Egy az X halmazt az Y-ba képező függvényt injektívnek nevezünk, ha különböző X-beli elemekhez különböző Y-beli elemeket rendel.*

1.45. Definíció (injektív függvény inverze). *Legyen $f : X \to Y$ injektív függvény; ekkor f inverzén azt az – f^{-1} szimbólummal jelölt – függvényt értjük, amelyre a) $D(f^{-1}) = R(f)$, b) minden egyes $R(f)$-beli y esetén $f^{-1}(y)$ az az X-beli elem, amelyre $f(f^{-1}(y)) = y$.*

1.46. Definíció (kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, bijekció). *Egy függvényről akkor mondjuk, hogy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést (vagy bijekciót) létesít az X és Y halmazok között, ha injektív, értelmezési tartománya X és értékkészlete Y.*

1.47. Definíció (halmaz függvény szerinti képe, illetve ősképe). *Tetszőleges f függvény és X, Y halmazok esetén az X halmaz f szerinti képe*

$$f[X] := \{y \in R(f) \,:\, \exists x \in D(f) \cap X,\ \textit{melyre}\ f(x) = y\},$$

míg az Y halmaz f szerint ősképe (vagy teljes inverz képe)

$$f^{-1}[Y] := \{x \in D(f) \,:\, f(x) \in Y\}.$$

1.48. Megjegyzés. *Könnyen belátható, hogy injektív f esetén nem jelöltünk két különböző halmazt ugyanazzal a jelsorozattal, vagyis ilyenkor tetszőleges Y halmaznak az f^{-1} (f inverze) szerinti képe egyenlő az Y halmaz f szerinti ősképével.*

1.49. Megjegyzés. *Az iménti definícióban bevezetett jelölések helyett az irodalomban többnyire az $f(X)$, illetve az $f^{-1}(Y)$ jelöléssel lehet találkozni. $X \subset D(f)$ esetén az X halmaz f szerint képére az $\{f(x)\}_{x \in X}$ jelölést is lehet használni.*

1.50. Definíció (összetett függvény, kompozíció). *Legyen $f : X_1 \to Y_1$ és $g : X_2 \to Y_2$, tegyük fel, hogy $R(g) \cap D(f) \neq \emptyset$; ekkor az f függvényből mint külső függvényből, és a g függvényből mint belső függvényből képezett összetett függvényen (kompozíción) azt az — $f \circ g$-vel jelölt — függvényt értjük, amelyre a) $D(f \circ g) := \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} (= g^{-1}[D(f)])$ és b) a $D(f \circ g)$ halmaz minden egyes x elemére $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.*

1.51. Definíció (sorozat fogalma). *(Végtelen) sorozaton olyan függvényt szokás érteni, amelynek értelmezési tartománya a valamely nemnegatív számnál (többnyire az 1-nél vagy a 0-nál) nem kisebb egész számok halmaza. A számsorozat, pontsorozat, vektorsorozat, ... szavak jelentése: olyan sorozat, amelynek értékei (tagjai) számok, pontok, vektorok, ...*

A bijekció fogalmának felhasználásával lehet bevezetni néhány fontos halmazelméleti alapfogalmat.

1.7. Néhány további fontos halmazelméleti fogalom

1.52. Definíció (n elemű halmaz, véges halmaz, végtelen halmaz). *Legyen $n \in \mathbb{Z}^+$; egy H halmazról akkor mondjuk, hogy n elemű, ha létezik bijekció az $\overline{1,n}$ és H halmazok között. Az üres halmazt 0 elemű halmaznak is nevezzük. Egy halmaz akkor véges, ha valamely nemnegatív egész n-re n elemű. Ha egy halmaz nem véges, akkor végtelen halmaznak nevezzük.*

1.53. Definíció (megszámlálható halmazok). *A H halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezzük, ha létezik bijekció a pozitív egész számok halmaza és H között. A H halmazt megszámlálhatónak nevezzük, ha vagy üres, vagy létezik a pozitív egészek halmazát H-ra képező függvény.*

Nyilvánvaló, hogy mind a pozitív egészek halmaza, mind a nemnegatív egészek halmaza megszámlálhatóan végtelen (a definícióban megkövetelt bijekciót értelmezhetjük például az $n \mapsto n$, illetve az $n \mapsto n+1$ hozzárendeléssel). Az összes egészek halmaza is megszámlálhatóan végtelen (rendeljük hozzá például az 1-hez a 0-t, minden pozitív egész n esetén $2n$-hez a $-n$-t és $2n+1$-hez az n-t).

1.54. Példa. *Az összes pozitív egészekből alkotott rendezett párok halmaza megszámlálhatóan végtelen. Valóban, a prímtényezős felbontás egyértelműségéből könnyen következik, hogy ha minden pozitív egész n-hez azt a $(k,m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ párt rendeljük, amelyre $n = 2^{k-1}(2m-1)$, akkor ez a hozzárendelés egyrészt jól definiált, másrészt bijekció a $\mathbb{Z}^+$ és $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ halmazok között.*

1.55. Tétel. *Ha a $\mathcal{H}$ halmazrendszer minden egyes eleme megszámlálható halmaz, akkor az unióhalmaza is megszámlálható.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H} = \emptyset$ vagy $\mathcal{H} = \{\emptyset\}$, akkor az unióhalmaz definíciója szerint az $\cup\mathcal{H}$ halmaznak szintén nem létezhet egyetlen eleme sem. A megszámlálható halmaz definícióa szerint tehát a továbbiakban feltehetjük, hogy a $\mathcal{H} \setminus \{\emptyset\}$ halmaz, melynek unióhalmaza ugyanaz, mint a $\mathcal{H}$ halmazrendszeré, azonos valamely (H_n) halmazsorozat értékkészletével. Legyen minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $f_n : \mathbb{Z}^+ \to H_n$ értékkészlete H_n. Értelmezzük az $f : \mathbb{Z}^+ \to \cup_{m=1}^{\infty} H_m$ függvényt úgy, hogy a $2^{k-1}(2m-1)$ számhoz rendelje hozzá az $f_m(k) (\in H_m \subset \mathcal{H})$ elemet. Ez jól definiált, és értékkészlete az egész $\cup\mathcal{H}$ halmazzal egyenlő (ha $y \in \cup\mathcal{H}$, akkor valamely m-re $y \in H_m$, azaz valmely m-re $y \in R(f_m)$, tehát valamely m-re és k-ra $y = f_m(k)$, azaz $f(2^{k-1}(2m-1)) = y$). $\square$

1.56. Tétel. *Ha $[a,b]$ nemelfajuló zárt intervallum, akkor $[a,b]$ nem megszámlálható halmaz.*

Bizonyítás. Ha a (nyilván nemüres) $[a,b]$ intervallum megszámlálható volna, akkor előállna egy (x_n) sorozat értékkészleteként. Ahhoz tehát, hogy ebből az indirekt feltevésből ellentmondásra jussunk, elég a következőt igazolni: bármely (x_n) számsorozat és bármely nemelfajuló $[a,b]$ intervallumban esetén ennek az intervallumnak van olyan eleme, mely a sorozat minden egyes tagjától különbözik. Az intervallum ilyen tulajdonságú elemének létezésére a Cantor-axiómából következtetünk. Azt az $([a,b])$ intervallumsorozatoot, amelyre a Cantor-axiómát lehet majd alkalmazni, az alábbi rekurzióval („harmadoló eljárással") értelmezzük: Legyen $a_0 := a$, $b_0 := b$. Ha n olyan nemnegatív egész, amelyre már értelmeztük a_n-t és b_n-t, éspedig úgy, hogy $a_n < b_n$ és

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]\,,$$

teljesüljön, akkor – bevezetve a $c_n := (2a_n + b_n)/3$, $d_n := (a_n + 2b_n)/3$ jelöléseket – legyen $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [d_n, b_n]$, illetve $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, c_n]$ attól függően, hogy az x_{n+1} szám benne van az $[a_n, c_n]$ intervallumban, vagy nincs benne. Nyilvánvaló, hogy $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ valódi nemelfajuló részintervalluma az $[a_n, b_n]$ intervallumnak, és nem tartalmazza az x_{n+1} számot. Ezek szerint az

$([a_n, b_n])$ intervallumsorozat nemelfajuló intervallumok tartalmazásra nézve monoton fogyó sorozata, és minden pozitív egész n-re $x_n \notin [a_n, b_n]$. Az előbbiből – a Cantor-axióma alapján – következik, hogy az $[a_n, b_n]$ intervallumoknak van közös elemük, az utóbbiból padig az, hogy ha u közös elem, akkor u a sorozat minden egyes tagjától különbözik ($u = x_n \Rightarrow u \notin [a_n, b_n]$). □

A most bevezetett fogalmakkal kapcsolatban bizonyítás nélkül elfogadunk néhány alapvető tényt:

1.57. Állítás. *I) ha m és n különböző nemnegatív egészek, akkor nincs olyan halmaz, amely egyszerre volna m elemű is és n elemű is.*

II) egy halmaz pontosan akkor megszámlálható, ha vagy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen,

III) egy halmaz pontosan akkor végtelen, ha van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.

1.8. Egyváltozós valós függvényekkel kapcsolatos alapfogalmak

1.58. Definíció (korlátos függvény). *Az f (egyváltozós) valós függvényt rendre alulról korlátosnak, felülről korlátosnak, illetve korlátosnak nevezzük, ha értékkészlete alulról korlátos, felülről korlátos, illetve korlátos számhalmaz.*

1.59. Megjegyzés. *A korlátos halmazoknak az 1.18. Megjegyzésben adott jellemzése alapján állíthatjuk, hogy egy valós értékű függvény pontosan akkor korlátos, ha van olyan nemnegatív K szám, amely a függvény egyetlen értékének abszolút értékénél sem kisebb. Itt a „nemnegatív” szó helyettesíthető a „pozitív” szóval is.*

1.60. Definíció (számsorozat lokális alsó/felső korlátja). *Ha az A számhoz és az (x_n) számsorozathoz található olyan pozitív egész M, amelynél nagyobb n-ekre $A \leq x_n$, akkor azt mondjuk, hogy az A szám lokális alsó korlátja az (x_n) sorozatnak. Ha a B számhoz és az (x_n) számsorozathoz található olyan pozitív egész M, amelynél nagyobb n-ekre $x_n \leq B$, akkor azt mondjuk, hogy a B szám lokális felső korlátja az (x_n) sorozatnak.*

1.61. Megjegyzés. *A számsorozat lokális alsó, illetve lokális felső korlátjának fogalma nem általánosan használt fogalmak, ezért ezeket csak „belső használatra” vezetjük be.*

1.62. Lemma. *I) Ha egy számsorozatnak van lokális alsó korlátja, akkor alulról korlátos, ha van lokális felső korlátja, akkor felülről korlátos.*
II) Ha egy számsorozatnak van lokális alsó és felső korlátja is, akkor ez a sorozat korlátos.
III) Ha az (x_n) sorozathoz található olyan nemnegatív L és olyan pozitív egész M, amelynél nagyobb n-ekre $|x_n| \leq L$, akkor (x_n) korlátos.

Bizonyítás vázlata. $\min\{A, x_1, \ldots, x_M\}$ alsó, illetve $\max\{B, x_1, \ldots, x_M\}$ felső korlát, a másik két állítás következik az elsőből ($-L$ lokális alsó, L lokális felső korlát). □

1.63. Definíció (monoton függvény, szigorúan monoton függvény). *Az f egyváltozós valós függvényt monoton növőnek nevezzük, ha bárhogy véve az értelmezési tartomány x elemét, és az x-nél nagyobb y elemét, ezekre az $f(x) \leq f(y)$ egyenlőtlenség teljesül. Az f egyváltozós valós függvényt monoton fogyónak nevezzük, ha bárhogy véve az értelmezési tartomány x elemét, és az x-nél nagyobb y elemét, ezekre az $f(x) \geq f(y)$ egyenlőtlenség teljesül. Ha ebben a definícióban a $\leq$ jelet a $<$, illetve a $\geq$ jelet a $>$ jelre cseréljük ki, akkor kapjuk a szigorúan monoton növő, illetve a szigorúan monoton fogyó függvény definícióját.*

1.64. Megjegyzés. *Sorozat esetében — x és y helyett n és $n+k$ indexekről beszélve — elég a szomszédos indexpárokra ($k := 1$) vonatkozóan megkövetelni a definícióban szereplő egyenlőtlenségeket (vagyis például az (a_n) sorozat pontosan akkor monoton növő, ha minden n pozitív egészre $a_n \leq a_{n+1}$). Ennek (igen könnyű) bizonyítása k szerinti teljes indukcióval történhet.*

1.65. Definíció (páros függvény, páratlan függvény). *Az f egyváltozós (valós) függvényt párosnak nevezzük, ha az értelmezési tartományának minden egyes x elemére $-x \in D(f)$ és $f(-x) = f(x)$. Az f egyváltozós (valós) függvényt páratlannak nevezzük, ha az értelmezési tartományának minden egyes x elemére $-x \in D(f)$ és $f(-x) = -f(x)$.*

1.66. Definíció (periodikus függvény). *Legyen p nullától különböző valós szám; az f egyváltozós (valós) függvényt p szerint periodikusnak nevezzük, ha az értelmezési tartományának minden egyes x elemére $x+p \in D(f)$ és $f(x+p) = f(x)$. Egy egyváltozós (valós) függvényt periodikusnak nevezünk, ha van olyan nullától különböző valós szám, amely szerint ez a függvény periodikus. Ha f p szerint periodikus, akkor azt is mondjuk, hogy p periódusa az f függvénynek.*

1.67. Példák. *1. Minden nullától különböző n egész esetén mind a koszinusz-, mind a szinuszfüggvény $2n\pi$ szerint periodikus; a* tg, ctg, $\cos^2$, $\sin^2$ *függvények pedig $n\pi$ szerint.*

2. A törtrészfüggvény minden nullától különböző egész szám szerint periodikus.

3. Minden nullától különböző r racionális szám esetén a Dirichlet-függvény (amely a racionális számokhoz az 1, *az irracionális számokhoz a* 0 *értéket rendeli) r szerint periodikus. Ennek bizonyítása céljából elég annyit ésszrevenni, hogy egyrészt bármely két racionális szám öszege racionális, másrészt egy irracionális és egy racionális szám öszege irracionális.*

4. Minden pozitív egész k szám esetén a $((-1)^n)$ sorozat $2k$ szerint periodikus.

1.68. Definíció (konvex függvény). *Az egyváltozós valós $f : I \to \mathbb{R}$ függvényt akkor nevezik konvexnek, ha egyrészt értelmezési tartománya nemelfajuló (azaz egynél több elemű) intervallum, másrészt bármely I-beli a, bármely a-nál nagyobb I-beli b és bármely $t \in (0,1)$ esetén*

$$f\left(a + t(b-a)\right) = f\left((1-t)a + tb\right) \leq (1-t)f(a) + tf(b) = f(a) + t\left(f(b) - f(a)\right).$$

Ha itt a $\leq$ jel helyére rendre a $<$, a $\geq$, illetve a $>$ jelet írjuk, akkor kapjuk a szigorúan konvex, a konkáv, illetve a szigorúan konkáv függvény definícióját.

Egyszerű geometriai (hasonlósági) megfontolások mutatják, hogy egy nemelfajuló I intervallumon értelmezett f függvény konvexitása szemléletesen a következőt jelenti: az $[a,b] \subset I$ feltételnek eleget tevő (a,b) intervallumok mindegyikére, az $f|_{(a,b)}$ függvény grafikonjának egyetlen pontja sincs az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontok (nyílt) összekötő szakasza fölött (ábra!).

1.69. Definíció (függvényműveletek). *Ha a valós értékű f és g függvények értelmezési tartományainak H közös része nemüres halmaz, akkor az f és g függvények összege, különbsége, illetve szorzata az a H-n értelmezett (valós értékű) függvény, amely minden egyes H-beli x elemhez hozzárendeli az $f(x) + g(x))$, $f(x) - g(x)$, illetve $f(x)g(x)$ számot. Ha olyan H-beli elem is létezik, amelyhez g nullától különböző értéket rendel, akkor az összes ilyen tuladonságú H-beli elemek halmazán értelmezzük f és g hányadosát, éspedig az $x \mapsto f(x)/g(x)$ hozzárendeléssel. Jelölések: $f+g$, $f-g$, fg, f/g.*

1.70. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy valós számsorozatok összege, különbsége és szorzata maga is sorozat, míg a hányadosuk nem feltétlenül az.*

1.71. Definíció. *Ha valamely $b = (b_n)$ sorozathoz van olyan nemnegatív egész M, amelynél nagyobb n egészekre $b_n \neq 0$, akkor a legkisebb ilyet N-nel jelölve, tetszőleges $a = (a_n)$ számsorozat esetén értelmezzük az (a_n/b_n) sorozatot az $(a_n)/(b_n)$ függvény azon leszűkítéseként, melynek értelmezési tartománya $D(a) \cap D(b) \cap (N, +\infty)$.*

2. SZÁMSOROZAT HATÁRÉRTÉKE

2.1. A határérték és a konvergencia fogalma

2.1. Definíció (valós határérték). *Azt mondjuk, hogy az (x_n) számsorozat határértéke (limesze) az A valós szám, vagy hogy (x_n) tart az A számhoz, ha minden egyes ε pozitív számhoz található olyan pozitív egész N, amelynél nagyobb n egészek mindegyikére $|x_n - A| < \varepsilon$.*

2.2. Megjegyzés (elnevezések, jelölések). *Az iménti definícióban szereplő ε számot hibakorlátnak, N-t küszöbindexnek szokták nevezni. Valójában az N helyett logikusabb az $N(\varepsilon)$ jelölés, hiszen egy olyan függvény létezéséről van szó, amely minden egyes pozitív számhoz hozzárendel egy pozitív egészt. Néha hasznosnak fog bizonyulni egy még ennél is bonyolultabb jelölés használata (ugyanis lehetővé fogja tenni egyes bizonyítások lényegének rendkívül tömör összefoglalását): a sorozattól való függés feltüntetése céljából az $N^x(\varepsilon)$ jelölésé. Annak a mondatnak a rövid leírására, hogy az (x_n) sorozat határértéke A, a $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ (kiemelt formulában a*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A),$$

vagy a $\lim(x_n) = A$ jelsorozatot használjuk, míg az „(x_n) tart A-hoz” kifejezést az $x_n \to A$ jelsorozat rövidíti.

2.3. Definíció (konvergens, ill. divergens sorozat). *Egy számsorozatot akkor nevezünk konvergensnek, ha tart egy valós számhoz; ha egy számsorozat nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.*

A 2.1., 2.7. definíciók megértését (s ennek következtében számos tétel megértését is) megkönnyítheti az alábbi állítás áttanulmányozása.

2.4. Állítás. *Egy pozitív egészekből álló H halmazra vonatkozóan az alábbi két kijelentés egymással egyenértékű: 1. van olyan N pozitív egész, amelynél nagyobb egészek mindegyike benne van a H halmazban, 2. $\mathbb{Z}^+ \setminus H$ véges.*

Bizonyítás. 1.⇒2. Az 1. állításból következik, hogy $\mathbb{Z}^+ \setminus H \subset \overline{1, N}$, ezért $\mathbb{Z}^+ \setminus H$ elemeinek száma legfeljebb N.
2.⇒1. Ha $\mathbb{Z}^+ \setminus H$ üres, akkor $H = \mathbb{Z}^+$, ezért N szerepét akármelyik pozitív egész játszhatja. Ha $\mathbb{Z}^+ \setminus H$ nemüres, véges halmaz, akkor e halmaz legnagyobb eleme játszhatja az N szerepét (azt, hogy bármely véges nemüres számhalmaznak van legnagyobb elme, az elemszám szerinti teljes indukcióval lehet bizonyítani, ebben a kulcslépés a következő:

$$\max\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} = \max\{\max\{x_1, \ldots, x_n\}, x_{n+1}\}.)$$

□

2.5. Definíció. *Ha egy T tulajdonság értelmezett a pozitív egész számok halmazán, akkor az a kijelentés, hogy „majdnem minden n-re $T(n)$”, azt jelenti, hogy a $T(n)$ állítás csak véges számú pozitív egész n esetén hamis.*

2.6. Megjegyzés (a valós határérték definíciójának átfogalmazása). *Ezek szerint a valós határérték definíciója így is fogalmazható: Azt mondjuk, hogy az* (x_n) *sorozat határértéke az* A *valós szám, ha minden pozitív* ε *esetén csak véges számú pozitív egész* n*-re teljesül az* $|x_n - A| \geq \varepsilon$ *egyenlőtlenség (azaz minden pozitív* ε *esetén az ezen egyenlőtlenség pozitív egész* n *megoldásainak halmaza véges). A 2.5. Definícióban bevezetett szóhasználattal ugyanez így hangzik: az* (x_n) *sorozat határértéke az* A *szám, ha minden pozitív* ε *esetén majdnem minden pozitív egész* n*-re* $|x_n - A| < \varepsilon$*. Valóban, minden pozitív* ε *esetén alkalmazható az iménti állítás arra a* H *halmazra, amelynek elemei az* $|x_n - A| < \varepsilon$ *egyenlőtlenség pozitív egész* n *megoldásai.*

Átfogalmazható a definíció az őskép fogalmának segítségével is (ld. 1.47-t): azt mondjuk, hogy az (x_n) *sorozat határértéke az* A *szám, ha minden pozitív* ε *esetén az* $\mathbb{R} \setminus B(A, \varepsilon)$ *halmaznak az* (x_n) *sorozat szerinti ősképe véges halmaz. Itt persze azt az elemi tényt használtuk, hogy* x_n *pontosan akkor teljesíti az* $|x_n - A| < \varepsilon$ *egyenlőtlenséget, ha nagyobb, mint* $A - \varepsilon$ *és kisebb mint* $A + \varepsilon$*.*

Az alábbi definícióban olyan mondatok jelentését értelmezzük, amelyekben szerepel egy-egy nem értelmezett fogalom, a „plusz végtelen” (jelölése $+\infty$), és a „mínusz végtelen” (jelölése $-\infty$). Emlékezzünk vissza: hasonló volt a helyzet a végtelen halmaz, és a megszámlálhatóan végtelen halmaz fogalmának értelmezésénél is.

2.7. Definíció ($\pm\infty$, mint határérték). *Azt mondjuk, hogy az* (x_n) *számsorozat határértéke (limesze)* $+\infty$*, vagy hogy* (x_n) *tart a* $+\infty$*-hez, ha minden egyes* K *valós számhoz található olyan pozitív egész* N*, amelynél nagyobb* n *egészek mindegyikére* $x_n > K$*. Azt mondjuk, hogy az* (x_n) *számsorozat határértéke (limesze)* $-\infty$*, vagy hogy* (x_n) *tart a* $-\infty$*-hez, ha minden egyes* K *valós számhoz található olyan pozitív egész* N*, amelynél nagyobb* n *egészek mindegyikére* $x_n < K$*.*

A definícióban értelmezett mondat jelekkel történő leírása ugyanúgy történik, mint a valós (véges) határérték esetében, persze az A helyébe lép a $+\infty$, illetve a $-\infty$ szimbólum.

2.8. Megjegyzés (a definíció átfogalmazásai). *Evidens, hogy a* $+\infty$*-hez, illetve* $-\infty$*-hez tartó sorozat definíciójában a „valós” szó helyett írhatjuk a „pozitív”, illetve a „negatív” szót is. Most is mondhatjuk továbbá, hogy* (x_n) *pontosan akkor tart a* $+\infty$*-hez, ha minden pozitív* K *esetén csak véges számú pozitív egész* n*-re teljesül az* $x_n \leq K$ *egyenlőtlenség (a* $(-\infty, K])$ *intervallumnak az* (x_n) *sorozat szerinti ősképe véges halmaz), illetve ha minden pozitív* K *esetén majdnem minden* n*-re* $x_n > K$*.*

2.9. Példák. *I) Ha* $A \in \mathbb{R}$ *és minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $x_n = A$*, akkor* $x_n \to A$*. Valóban, bármely pozitív* ε *mellett bármely pozitív egész választható küszöbindexnek.*
II) Az (n^r) *sorozatnak minden racionális* r *esetén van határértéke. Ez a határérték negatív* r *esetén* 0*,* $r = 0$ *esetén* 1*, pozitív* r *esetén pedig* $+\infty$*. Valóban, ha* p *és* q *pozitív egészek,* $r = -p/q$*, akkor azoknak a pozitív egész* n*-eknek a halmaza, amelyekre az alábbi – egymással egyenértékű – egyenlőtlenségek teljesülnek, egyenlő az* $1/\sqrt[p]{\varepsilon^q}$ *szám egész részénél nem nagyobb pozitív egészek halmazával:*

$$|n^r - 0| \geq \varepsilon, \qquad \frac{1}{\sqrt[q]{n^p}} \geq \varepsilon, \qquad \sqrt[q]{n^p} \leq \frac{1}{\varepsilon}, \qquad n^p \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q, \qquad n \leq \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon^q}}.$$

$r = 0$ *esetén a sorozat minden tagja* 1*, ezért a határértéke* 1*, míg* $r = p/q$ *(*$p, q \in \mathbb{Z}^+$*) esetén azoknak a pozitív egészeknek a halmaza, amelyekre az ismét egymással egyenértékű*

$$\sqrt[q]{n^p} \leq K, \qquad n^p \leq K^q, \qquad n \leq \sqrt[p]{K^q}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek, egyenlő a $\sqrt[p]{K^q}$ *egész részénél nem nagyobb pozitív egészek halmazával, ez persze ismét véges halmaz.*

III) Az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat határértéke 1. Legyen ugyanis ε tetszőleges pozitív szám, $n > 2$ egész, és alkalmazzuk a mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenséget az n tagú $(\sqrt{n}, \sqrt{n}, 1, \ldots, 1)$ sorozatra:

$$1 - \varepsilon < 1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \ldots + 1}{n} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 + \varepsilon,$$

az utolsó egyenlőtlenség egy küszöbindextől kezdve minden n-re teljesül (lásd az előző példát $r = -1/2$ mellett).

IV) A $((-1)^n)$ sorozatnak nincs határértéke. Nem lehet ugyanis a határérték $-\infty$, mert a sorozatnak nincs például -2-nél kisebb tagja, ugyanígy nem lehet a határérték $+\infty$ sem, mert a sorozatnak nincs 2-nél nagyobb tagja (vagyis ezekhez a K számokhoz nem található alkalmas küszöbindex). Nem tarthat a sorozat egyetlen A valós számhoz sem, mert ha $\lim(x_n) = A$ lenne, akkor az $\varepsilon = 1$ hibakorláthoz választható lenne egy N küszöbindex, amelynél nagyobb n-ekre (például $n := N+1$-re) $|x_{n+1} - x_n| \leq |x_{n+1} - A| + |A - x_n| < 1 + 1 = 2$ lenne, holott minden pozitív egész n-re $|x_{n+1} - x_n| = 2$.

V) Minden $a \in (1, +\infty)$ esetén $\lim(a^n) = +\infty$. Valóban, a Bernoulli-egyenlőtlenség szerint $a^n \geq 1 + n(a-1)$, tehát ha $K > 0$, akkor $n > (K-1)/(a-1)$ esetén (vagyis véges számú kivétellel minden pozitív egész n-re) $1 + n(a-1) > K$, ilyenkor tehát $a^n > K$ is teljesül.

2.10. Tétel (a határérték egyértelműsége). *Bármely valós számsorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.*

Bizonyítás. Indirekt: tegyük fel, hogy az (x_n) sorozatnak legalább két határértéke van. Ekkor tehát vagy a $-\infty$ és a $+\infty$, vagy a $-\infty$ és egy A valós szám, vagy egy A valós szám és $+\infty$, vagy egy A és egy nála nagyobb B valós szám egyaránt határértéke az (x_n) sorozatnak. Ebből az indirekt feltevésből mind a négy esetben arra a képtelenségre lehet következtetni, hogy valamely – két küszöbindex nagyobbikaként kapható – küszöbnél nagyobb n pozitív egészek mindegyikére a sorozat n-edik tagjának benne kell lennie két diszjunkt halmaz közös részében, vagyis az üres halmazban. Ugyanis az első esetben például a definíció alapján meg tudjuk választani a két küszöbindexet úgy, hogy az egyiknél nagyobb n-ek mindegyikére x_n negatív, a másiknál nagyobb n-ek mindegyikére x_n pozitív legyen. A második esetben a definíciókból olyan M, N küszöbindexek létezése következik, melyekre $n > M$ esetén $x_n < A - 1$ és $n > N$ esetén $A - 1 < x_n < A + 1$, a harmadik esetben olyanoké, amelyekre $n > M$ esetén $A - 1 < x_n < A + 1$ és $n > N$ esetén $x_n > A + 1$, végül a negyedik esetben – a $p := (B - A)/2$ jelöléssel – $n > M$ esetén $A - p < a_n < A + p$ és $n > N$ esetén $A + p = B - p < x_n < B + p$. $\square$

Számos olyan eljárás van, amely határértékkel rendelkező sorozatból újabb, az eredeti sorozatéval megegyező határértékű sorozatot készít; az alábbi tételben ezek közül sorolunk fel néhányat. A tétel kimondása közben – a rövidség érdekében – nem törekszünk maximális precizitásra, de ezt ellensúlyozandó, a tétel kimondását magyarázó megjegyzések követik.

2.11. Tétel. *Ha az (x_n) sorozat határértéke A, amely lehet valós szám, $+\infty$, vagy $-\infty$ is, akkor minden olyan (y_n) sorozat határértéke is A, amely a következő eljárások valamelyikének alkalmazásával származtatható az (x_n) sorozatból: 1) egy új tag beiktatása az (x_n) sorozat tagjai közé vagy elé, 2) egy tag elhagyása az (x_n) sorozat tagjai közül, 3) egy tag megváltoztatása, 4) az (x_n) sorozat bizonyos számú (akár végtelen sok) tagjának megismétlése egyszer-egyszer, 5) az (x_n) sorozatban a tagok sorrendjének tetszőleges megváltoztatása.*

Az 1), illetve a 2) eljárás azt jelenti, hogy van olyan m pozitív egész, hogy a) minden $i \in \overline{1, m-1}$ esetén $y_i = x_i$, b) minden $i \geq m$ esetén $y_{i+1} = x_i$, illetve $y_i = x_{i+1}$; 5) pedig egy olyan $(m_n) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ bijekció létezését, amelyre minden pozitív egész n esetén $y_n = x_{m_n}$.

Bizonyítás. Mind az öt állítás esetében evidens, hogy konvergencia esetén minden egyes ε pozitív számhoz, $\pm\infty$-hez tartás esetén minden $K > 0$, illetve $K < 0$ számhoz csak véges sok olyan n pozitív egész van, melyre $|y_n - A| \geq \varepsilon$, avagy $y_n \leq K$, illetve $y_n \geq K$. □

A következő egyszerű észrevétel lehetővé teszi, hogy a $-\infty$-hez tartó tételek kimondását és bizonyítását könnyű házi feladatnak tekinthessük.

2.12. Állítás. *Egy számsorozat pontosan akkor tart a $-\infty$-hez, ha a (-1)-szerese a $+\infty$-hez tart.*

Bizonyítás vázlata. $-x_n > -K \Leftrightarrow x_n < K$. □

2.2. Határérték és korlátosság

2.13. Tétel. *Minden konvergens sorozat korlátos, de nem minden korlátos sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R}$. A definíciót például az $\varepsilon = 1$ hibakorláttal alkalmazva azt kapjuk, hogy $A - 1$ lokális alsó és $A + 1$ lokális felső korlátja az (x_n) sorozatnak, tehát (1.62) a sorozat korlátos.
A $((-1)^n)$ sorozat korlátos, hiszen a -1 szám alsó, az 1 pedig felső korlátja, de mint az imént láttuk (2.9.IV)), nem konvergens. □

2.14. Tétel. *Az (x_n) sorozat alulról korlátos és felülről nem korlátos volta szükséges, de nem elegendő ahhoz, hogy $+\infty$-hez tartson. Az (y_n) sorozat felülről korlátos és alulról nem korlátos volta szükséges, de nem elegendő ahhoz, hogy $-\infty$-hez tartson.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x_n \to +\infty$. A $+\infty$-hez tartás definíciójából látszik, hogy egyetlen K valós szám sem lehet felső korlátja, viszont minden egyes valós szám lokális alsó korlátja a sorozatnak, tehát az 1.62. Lemma szerint a sorozat alulról korlátos.
Példa olyan alulról korlátos, de felülről nem korlátos sorozatra, amely nem tart $+\infty$-hez, az $n \mapsto n(1 + (-1)^n)/4$ sorozat: ennek értékkészlete egyenlő a nemnegatív egészek halmazával (minden páratlan indexű tag 0 és minden pozitív egész k esetén a $2k$-adik tag egyenlő k-val), amelynek felső korlátja nincs, egy alsó korlátja a 0, de nem tart a $+\infty$-hez, hiszen a sorozat minden második tagja 0, ezért egyetlen pozitív K számhoz sem található olyan küszöbindex, amelynél nagyobb n-ek mindegyikére a sorozat n-edik tagja nagyobb volna K-nál.
A tétel második állítása következik az elsőből és a 2.12. Állításból. □

2.3. Határérték és az alapműveletek

Az alábbi két tétel bizonyítása során jó szolgálatot fog tenni a következő két egyszerű segédtétel.

2.15. Lemma. *Az (x_n) sorozat pontosan akkor tart az A számhoz, ha az $(x_n - A)$ sorozat nullsorozat.*

Bizonyítás. A két definíció szóról szóra megegyezik, hiszen minden pozitív egész n-re $|x_n - A| = |(x_n - A) - 0|$. □

2.16. Definíció (nullsorozat). *A 0-hoz tartó sorozatokat rövidebben nullsorozatoknak is nevezzük.*

2.17. Lemma (műveletek nullsorozatokkal). *I) Két nullsorozat összege nullsorozat, II) egy korlátos sorozat és egy nullsorozat szorzata nullsorozat.*

Bizonyítás. I) Tegyük fel tehát, hogy $\lim(u_n) = \lim(v_n) = 0$ és legyen ε tetszőleges pozitív szám. Ekkor az $\varepsilon/2$ hibakorláthoz – mint mint minden pozitív számhoz – létezik olyan $N_1 = N^u(\varepsilon/2)$ és $N_2 = N^v(\varepsilon/2)$ küszöbindex, melyekre $n > N_1$ esetén $|u_n| < \varepsilon/2$ és $n > N_2$ esetén $|v_n| < \varepsilon/2$, ezért ha $n > N^{u+v}(\varepsilon) := \max\{N_1, N_2\}$, akkor

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

II) Legyen tehát (u_n) korlátos sorozat, K olyan pozitív szám, melyre minden pozitív egész n esetén $|u_n| \leq K$, (v_n) nullsorozat és ε tetszőleges pozitív szám. Válasszunk az ε/K hibakorláthoz olyan küszöbindexet, amelynél nagyobb n-ek mindegyikére $|v_n| < \varepsilon/K$. Ekkor ugyanezen n pozitív egészekre

$$|u_n \cdot v_n| = |u_n| \cdot |v_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

□

2.18. Tétel (konvergens sorozatok összege). *Ha* $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim(y_n) = B \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lim(x_n + y_n) = A + B$.

Bizonyítás. Alkalmazva először a 2.15. Lemmát az (x_n), (y_n) sorozatokra, majd a 2.17. Lemma I) állítását az $(x_n - A)$, $(y_n - B)$ nullsorozatokra, azt kapjuk, hogy az $(x_n + y_n - A - B)$ sorozat is nullsorozat, vagyis — ismét a 2.15. Lemma szerint — $\lim(x_n + y_n) = A + B$. □

2.19. Tétel (konvergens sorozatok szorzata). *Ha* $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim(y_n) = B \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lim(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$.

Bizonyítás. Az előző két lemma szerint elég azt igazolni, hogy az $(x_n \cdot y_n - A \cdot B)$ sorozat előállítható két nullsorozat összegeként. Egy ilyen előállítás az

$$x_n \cdot y_n - A \cdot B = x_n \cdot y_n - A \cdot y_n + A \cdot y_n - A \cdot B = (x_n - A) \cdot y_n + A \cdot (y_n - B)$$

azonosságból olvasható ki: a 2.17. Lemma II) részéből, valamint a konvergens sorozatok korlátos voltából (2.13) következik, hogy mind az $((x_n - A) \cdot y_n)$, mind az $(A \cdot (y_n - B))$ sorozat nullsorozat. □

2.20. Tétel (többtagú összeg és többtényezős szorzat határértéke). *Konvergens sorozatok akárhány tagú összege és akárhány tényezős szorzata konvergens, az összeg határértéke egyenlő a tagok határértékeinek összegével, a szorzat határértéke egyenlő a tényezők határértékeinek szorzatával.*

Bizonyítás vázlata. Alkalmazzunk az összeg tagjainak száma szerinti, illetve a szorzat tényezőinek száma szerinti teljes indukciót, továbbá használjuk fel az előző két tételt. □

2.21. Tétel (konvergens sorozat abszolút értéke). *Ha* $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lim(|x_n|) = |A|$.

Bizonyítás. Legyen ε tetszőleges pozitív szám és N olyan küszöbindex, amelynél nagyobb n-ek mindegyikére $|x_n - A| < \varepsilon$. Ekkor ugyanez a küszöbindex jó lesz az $(|x_n|)$ sorozathoz is, hiszen $||x_n| - |A|| \leq |x_n - A|$. $\square$

2.22. Példa. *Divergens sorozat abszolút értéke is lehet konvergens, például az $n \mapsto (-1)^n$ sorozaté.*

E példa ellenére egy speciális esetben az abszolútérték-sorozat konvergenciájából lehet következtetni az eredeti sorozatéra:

2.23. Tétel. *Egy (x_n) sorozat pontosan akkor nullsorozat, ha az $(|x_n|)$ sorozat nullsorozat.*

Bizonyítás vázlata. $|x_n - 0| = |x_n| = ||x_n| - 0|$. $\square$

2.24. Tétel (konvergens sorozat reciproka). *Ha $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor 1) véges sok olyan n pozitív egész van, melyre $x_n = 0$ (következésképpen lehet beszélni az $(1/x_n)$ sorozatról); 2) $\lim(1/x_n) = 1/A$.*

Bizonyítás. Előszöris (az előző tétel alapján, az $\varepsilon := |A|/2$ hibakorláthoz) vegyünk egy olyan M küszöbindexet, amelynél nagyobb n-ekre $||x_n| - |A|| < |A|/2$, következésképpen $|x_n| > |A|/2$; egy ilyen küszöbindex létezéséből az 1) állítás rögtön következik. A 2) állítás bizonyítása céljából a 2.15. és a 2.17. Lemma szerint elég annyit igazolni, hogy az $(1/x_n - 1/A)$ sorozat előáll egy 0-sorozat és egy korlátos sorozat szorzataként. Az $(1/x_n)$ sorozat értelmezési tartományának minden egyes n elemére

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{A} = \frac{A - x_n}{x_n \cdot A} = (A - x_n) \cdot \frac{1}{Ax_n},$$

és minthogy $n > M$ esetén

$$\left|\frac{1}{Ax_n}\right| = \frac{1}{|x_n|}\frac{1}{|A|} \leq \frac{2}{|A|}\frac{1}{|A|} = \frac{2}{A^2},$$

a 1.62. Lemma szerint az imént kapott szorzatelőállítás második tényezője korlátos. $\square$

2.25. Tétel (konvergens sorozatok hányadosa). *Ha $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R}$ és $\lim(y_n) = B \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, akkor 1) véges sok olyan n van, melyre $y_n = 0$ (következésképpen lehet beszélni az (x_n/y_n) sorozatról), 2) $\lim(x_n/y_n) = A/B$.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk először az előző tételt az (y_n) sorozatra, majd a szorzatsorozat konvergenciájára vonatkozó tételt (2.19) az (x_n) és az $(1/y_n)$ sorozatokra. $\square$

2.26. Példa. *Legyen $q > 1$ egész szám, tegyük fel, hogy létezik a $\lim(x_n) =: A$, és ha q páros, akkor azt is tegyük fel, hogy minden n-re $x_n \geq 0$. Ekkor a $(\sqrt[q]{x_n})$ sorozatnak is van határértéke, s ez a határérték valós A esetén $\sqrt[q]{A}$-val, $A \notin \mathbb{R}$ esetén A-val egyenlő.*

Bizonyítás. Ha $A \notin \mathbb{R}$, akkor az állítás abból következik, hogy minden pozitív K szám esetén a $\sqrt[q]{x_n} > K$, illetve páratlan q esetén a $\sqrt[q]{x_n} < -K$ egyenlőtlenség egyenértékű az $x_n > K^q$, illetve az $x_n < -K^q$ egyenlőtlenséggel, ezért ha az egyik teljesül egy küszöbindex felett minden n-re, akkor ugyanez mondható a vele egyenértékű másikra is. Hasonlóan egyszerűen intézhető el az $A = 0$ eset is amiatt, hogy a $-\varepsilon < \sqrt[q]{x_n} < \varepsilon$ egyenlőtlenségpár pontosan akkor teljesül, amikor $|x_n| < \varepsilon^q$.

Tekintsük végül azt az esetet, amikor A nullától különböző valós szám. A $(\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{A})$ sorozatról mutatjuk meg azt, hogy nullához tart, éspedig annak következtében tart nullához, hogy előáll az

$(x_n - A)$ nullsorozatnak és egy korlátos sorozatnak a szorzataként (2.15 és 2.17/II)). Legyen M olyan küszöbindex, amely felett minden n-re $|x_n - A| < |A|$, ezekre az n-ekre tehát x_n és A azonos előjelűek, következésképpen az ilyen n-ekre az

$$\sqrt[q]{x_n} - \sqrt[q]{A} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{q-1} \left(\sqrt[q]{x_n}\right)^i \left(\sqrt[q]{A}\right)^{q-1-i}} (x_n - A)$$

egyenlőség jobb oldalán lévő tört nevezője pozitív, sőt nagyobb mint $\left(\sqrt[q]{A}\right)^{q-1}$ (tehát a reciprok kisebb, mint ez utóbbi szám reciproka, ebből pedig az 1.62. Lemma alapján adódik az első tényező korlátossága):

$$\sum_{i=0}^{q-1} (\sqrt[q]{x_n})^i \left(\sqrt[q]{A}\right)^{q-1-i} = \left(\sqrt[q]{A}\right)^{q-1} \sum_{i=0}^{q-1} \left(\sqrt[q]{\frac{x_n}{A}}\right)^i = \left(\sqrt[q]{A}\right)^{q-1} \left(1 + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\sqrt[q]{\frac{x_n}{A}}\right)^i\right) > \left(\sqrt[q]{A}\right)^{q-1}.$$

□

2.27. Tétel. *Egy $+\infty$-hez tartó és egy alulról korlátos sorozat összege tart a $+\infty$-hez.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim(x_n) = +\infty$ és minden pozitív egész n esetén $y_n \geq A$. Ekkor tetszőleges K pozitív számhoz található olyan N küszöbindex, melynél nagyobb n-ek mindegyikére $x_n > K - A$, tehát $x_n + y_n > A$. □

2.28. Következmény. *Két $+\infty$-hez tartó sorozat összege is, továbbá egy $+\infty$-hez tartó és egy konvergens sorozat összege is tart a $+\infty$-hez.*

Bizonyítás. Teljesülnek az előző tétel feltételei: a 2.13. illetve a 2.14. Tétel szerint mindkét esetben egy $+\infty$-hez tartó és egy alulról korlátos sorozat összegéről van szó. □

2.29. Tétel. *Legyen (x_n) $+\infty$-hez tartó sorozat, (y_n) pedig olyan sorozat, melynek van pozitív lokális alsó korlátja. Ekkor* $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

Bizonyítás. Legyen K tetszőleges pozitív szám, p az (y_n) sorozat pozitív lokális alsó korlátja, N_1 olyan pozitív egész, amelynél nagyobb n egészek mindegyikére $y_n \geq p$, N_2 pedig olyan küszöbindex, melytől kezdve minden n-re $x_n > K/p$. Ekkor a $\max\{N_1, N_2\}$ küszöbindexnél nagyobb n-ek mindegyikére $x_n \cdot y_n > (K/p) \cdot p = K$. □

2.30. Következmény. *Ha az (x_n) sorozat határértéke $+\infty$, az (y_n) sorozaté pedig vagy $+\infty$, vagy egy pozitív szám, akkor* $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

Bizonyítás. Teljesülnek az előző tétel feltételei: az első esetben akármilyen pozitív szám, a második esetben a $(0, \lim(y_n))$ intervallum akármelyik eleme lokális alsó korlátja az (y_n) sorozatnak. □

2.31. Példa. *Legyen r tetszőleges pozitív egész, $b_0, \ldots, b_{r-1}$ tetszőleges valós számok, b_r tetszőleges nullától különböző valós szám, végül minden pozitív egész n-re legyen*

$$a_n := b_r n^r + b_{r-1} n^{r-1} + \ldots + b_1 n + b_0.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } b_r > 0, \\ -\infty, & \text{ha } b_r < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az állítás abból következik, hogy az (a_n) sorozat előáll egy $+\infty$-hez tartó, és egy b_r-hez tartó sorozat szorzataként, hiszen minden pozitív egész n-re

$$a_n = n^r\left(b_r + \frac{b_{r-1}}{n} + \ldots + \frac{b_1}{n^{r-1}} + \frac{b_0}{n^r}\right).$$

□

2.32. Példa. *Legyenek k és m tetszőleges nemnegatív egészek, $c_0, \ldots, c_{k-1}$ és $d_0, \ldots d_{m-1}$ tetszőleges valós számok, c_k és d_m tetszőleges nullától különböző valós számok, végül minden pozitív egész n-re legyen*

$$a_n := \frac{c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1} + \ldots + c_1 n + c_0}{d_m n^m + d_{m-1}n^{m-1} + \ldots + d_1 n + d_0}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < m, \\ \dfrac{c_k}{d_m}, & \text{ha } k = m, \\ +\infty, & \text{ha } k > m \text{ és } c_k d_m > 0, \\ -\infty, & \text{ha } k > m \text{ és } c_k d_m < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az a_n definíciójában szereplő törtet mind a négy esetben egyszerűsíteni fogjuk n^m-mel. A $k < m$ esetben célszerű bevezetni a $c_i := 0$ jelölést minden k-nál nagyobb és m-nél nem nagyobb i-re, ennek köszönhetően ugyanis a $k < m$ és a $k = m$ eset egyszerre vizsgálható. Mindkét esetben azt kapjuk, hogy az említett egyszerűsítés után mind a számláló, mind a nevező egy konstans és m darab nullsorozat összege:

$$a_n = \frac{c_m + \frac{c_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{c_1}{n^{m-1}} + \frac{c_0}{n^m}}{d_m + \frac{d_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{d_1}{n^{m-1}} + \frac{d_0}{n^m}},$$

így az új számláló határértéke c_m, az új nevezőé d_m.

Tegyük fel most, hogy $k > m$, jelöljük (1) jobb oldalát z_n-nel, nevezőjének reciprokát y_n-nel. Ekkor

$$a_n = y_n(c_k n^{k-m} + c_{k-1}n^{k-m-1} + \cdots + c_{m+1}n) + z_n.$$

Itt a jobb oldal első tagjában a második tényező $+\infty$-hez vagy $-\infty$-hez tart attól függően, hogy c_k pozitív vagy negatív (lásd a 3. határértéket), s minthogy az első tényező határértéke $1/d_m$, az első tag $+\infty$-hez vagy $-\infty$-hez tart attól függően, hogy a c_k, d_m főegyütthatók azonos, vagy különböző előjelűek. Végül ugyanez mondható (a_n)-ről is, hiszen a második tag korlátos (sőt konvergens: határértéke c_m/d_m).

□

2.33. Tétel. *Egy (x_n) sorozat pontosan akkor tart a $+\infty$-hez, ha teljesíti a következő két feltételt: (a) valamely küszöbindex feletti n pozitív egészek mindegyikére $x_n > 0$, (b) $(1/x_n)$ nullsorozat.*

Bizonyítás. I) Tegyük fel először, hogy (x_n) teljesíti az (a) és (b) feltételt. Legyen $K > 0$, N_1 pedig olyan pozitív egész, amelynél nagyobb n-ek mindegyikére $x_n > 0$. A (b) feltétel szerint van olyan N_1-nél nagyobb N pozitív egész, amelynél nagyobb n-ek mindegyikére $1/x_n = |1/x_n| < 1/K$, ezekre az n-ekre tehát $x_n > K$.

II) A $+\infty$-hez tartó sorozat definíciójából közvetlenül következik (a) is ($K := 0$) — aminek következtében lehet beszélni az $(1/x_n)$ sorozatról — és (b) is $K := 1/\varepsilon$). □

2.34. Példa. $\forall\, q \in (-1,1) \quad \lim(q^n) = 0.$

Bizonyítás. $q = 0$ esetén az állítás nyilvánvaló (2.9./I)). Ha $0 < |q| < 1$, akkor

$$1/|q| > 1 \overset{2.9/V}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|q|^n} = +\infty \overset{2.33}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} |q|^n = 0 \overset{2.23}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

□

Sem $+\infty$-hez tartó sorozatok különbségének, sem $+\infty$-hez tartó sorozatok hányadosának határértékéről nem lehet semmi általános érvényűt mondani, sem olyan hányadossorozatokéról, amelyeknek a nevezője nullsorozat, sem olyan szorzatsorozatokéról, amelyek egyik tényezője $+\infty$-hez tartó sorozat, a másik nullsorozat — eltekintve attól, hogy ha két $+\infty$-hez tartó sorozat hányadosának létezik határértéke, akkor az nem lehet sem $-\infty$, sem negatív szám. Ezt a témát a gyakorlatokon részletesebben tárgyaljuk.

Két $+\infty$-hez tartó sorozat hányadosának határértékéről *két további feltétel teljesülése esetén* lehet valamit állítani, többek között ez is kiolvasható az alábbi tételből:

2.35. Tétel (Stolz tétele). *Ha (b_n) szigorúan monoton nem korlátos sorozat, (a_n) pedig olyan sorozat, melyre létezik a $\lim((a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)) =: v$ határérték, akkor $\lim(a_n/b_n) = v$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy (b_n) szigorúan monoton növő. Az állítást a $v \in \mathbb{R}$, a $v = +\infty$, és a $v = -\infty$ esetekben külön-külön bizonyítjuk, de mindhárom esetben felhasználjuk azt, hogy bármely m és m-nél nagyobb n pozitív egészek esetén

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_{m+1} - a_m) + a_m}{b_n} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} + \frac{a_m}{b_n}.$$

Tegyük fel tehát először azt, hogy v valós szám, ε tetszőleges pozitív szám, m olyan küszöbindex, melytől kezdve minden n-re

$$b_n > 0 \qquad \text{és} \qquad \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - v \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

N pedig olyan m-nél nem kisebb küszöbindex, melytől kezdve minden n-re $(a_m - b_m v)/b_n < \varepsilon/2$ (a számláló konstans volta és a nevező végtelenhez tartása miatt létezik ilyen N). Ettől az N-től kezdve minden n-re (felhasználva a

$$v = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} v + \frac{b_m}{b_n} v$$

átalakítást és a háromszög-egyenlőtlenséget)

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - v \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} - v \right) + \frac{a_m - b_m v}{b_n} \right| \le$$

$$\le \sum_{k=m+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \left| \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} - v \right| + \left| \frac{a_m - b_m v}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b_n - b_m}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ha $v = +\infty$, K tetszőleges pozitív szám, m olyan küszöbindex, melytől kezdve minden n-re

$$b_n > 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} > 2(K+1),$$

N pedig olyan m-nél nem kisebb küszöbindex, melytől kezdve minden n-re $a_m/b_n > -1$ és $b_m/b_n < 1/2$, következésképpen $(b_n - b_m)/b_n > 1/2$ is teljesül (az $(1/b_n)$ sorozat nullsorozat), akkor egy ilyen N-től kezdve minden n-re

$$\frac{a_n}{b_n} > 2(K+1)\sum_{k=m+1}^{n}\frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} + \frac{a_m}{b_n} = 2(K+1)\frac{b_n - b_m}{b_n} + \frac{a_m}{b_n} > K + 1 - 1 = K.$$

Végül a $v = -\infty$ esetben alkalmazhatjuk az imént bizonyítottakat a $(-a_n)$, (b_n) sorozatokra, ebből azt kapjuk, hogy $\lim(-a_n/b_n) = +\infty$, tehát $\lim(a_n/b_n) = -\infty$.

Ha (b_n) szigorúan monoton fogyó, akkor alkalmazhatjuk a már bizonyítottakat a $(-a_n)$, $(-b_n)$ sorozatokra, és ebből éppen azt kapjuk, hogy ezek hányadosának határértéke v. $\square$

2.4. A kibővített valós számhalmaz

A valós számok halmazát több szempontból is célszerű kibővíteni két elemmel, a mínusz végtelennek (melynek szokásos jelölése $-\infty$), illetve plusz végtelennek nevezett $(+\infty)$ elemekkel. E két új elem mibenlétének a kérdésével nem foglalkozunk, csak azt tesszük fel, hogy ezek egymástól is, és minden egyes valós számtól is különböznek. Az $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ halmazt röviden az $\overline{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük. A $<$ relációt is kibővítjük $\overline{\mathbb{R}}$-beli relációvá a következő megállapodásokkal: $-\infty < +\infty$, $-\infty < x$ és $x < +\infty$ minden egyes x valós szám esetén. Ezekkel a megállapodásokkal összhangban beszélhetünk a kibővített $\leq$, $\geq$ és $>$ relációkról is ($x \leq y$ és $y \geq x$ jelentse azt, hogy $x < y$ vagy $x = y$, $y > x$ jelentse azt, hogy $x < y$).

Az alábbi három tétel bizonyítása házi feladat:

2.36. Tétel. *A kibővített $\leq$ relációra teljesülnek a valós számok axiómarendszerének 10.,11., 12. axiómái — ezeket most persze úgy értve, hogy bennük $\mathbb{R}$ helyett $\overline{\mathbb{R}}$-t írunk.*

Az 1.17. Definícióban valós szám helyett $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemet mondva, megkaphatjuk a valós számhalmaz (vagy akár az $\overline{\mathbb{R}}$-beli halmaz) $\overline{\mathbb{R}}$-beli felső, illetve alsó korlátjának fogalmát, majd ezek segítségével az $\overline{\mathbb{R}}$-ra vonatkozóan felülről korlátos, alulról korlátos, illetve korlátos számhalmaz (vagy $\overline{\mathbb{R}}$-beli halmaz) fogalmát. Az utóbbiak persze teljesen érdektelen fogalmak, hiszen ha $H \subset \overline{\mathbb{R}}$, akkor nyivánvaló, hogy $-\infty$ alsó korlátja, a $+\infty$ pedig felső korlátja H-nak, úgyhogy H korlátos ($\overline{\mathbb{R}}$-ra vonatkozóan).

2.37. Tétel. *Ha $H \subset \overline{\mathbb{R}}$, akkor H $\overline{\mathbb{R}}$-beli felső korlátainak halmazában van legkisebb elem, és H $\overline{\mathbb{R}}$-beli alsó korlátainak halmazában van legnagyobb elem.*

2.38. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{R}$ nemüres, alulról korlátos az eredeti értelemben, akkor $\inf H$ azonos a H halmaz legnagyobb $\overline{\mathbb{R}}$-beli alsó korlátjával, ha $H \subset \mathbb{R}$ nemüres, felülről korlátos az eredeti értelemben, akkor $\sup H$ azonos a H halmaz legkisebb $\overline{\mathbb{R}}$-beli felső korlátjával.*

2.39. Megjegyzés. *A legutóbbi tételnek köszönhetően nem okoz zavart az az általánosan elterjedt szokás (melyhez mi is csatlakozunk), hogy egy $H \subset \overline{\mathbb{R}}$ halmaz legnagyobb $\overline{\mathbb{R}}$-beli alsó, illetve a legkisebb $\overline{\mathbb{R}}$-beli felső korlátját is az $\inf H$, illetve a $\sup H$ szimbólummal jelölik, továbbá hogy az elnevés is ugyanaz, mint az $\mathbb{R}$-beli esetben: alsó határ, vagy infimum, illetve felső határ vagy szuprémum.*

Vizsgáljuk meg most, melyek azok a valós számhalmazok, amelyeknek $\overline{\mathbb{R}}$-beli infimuma, illetve szuprémuma $-\infty$-nel, vagy $+\infty$-nel egyenlő.

2.40. Tétel. *Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ esetén a következő két-két, illetve három állítás egymással egyenértékű:*
I) $\inf H = -\infty \iff$ *H alulról nem korlátos ($\mathbb{R}$-ben),*
II) $\sup H = +\infty \iff$ *H felülről nem korlátos ($\mathbb{R}$-ben),*
III) $\sup H = -\infty \iff \inf H = +\infty \iff H = \emptyset$.

Bizonyítás. I) Mindkét állítás azt jelenti, hogy minden valós számnál található kisebb H-beli szám. II) Mindkét állítás azt jelenti, hogy minden valós számnál található nagyobb H-beli szám. III) Ha $H = \emptyset$, akkor $\overline{\mathbb{R}}$ minden egyes eleme alsó korlátja is és felső korlátja is a H halmaznak, tehát a legkisebb felső korlátja $-\infty$, a legnagyobb alsó korlátja pedig $+\infty$. Ha $\sup H = -\infty$, akkor a $-\infty$ felső korlátja H-nak, ekkor tehát H-nak nem lehet $-\infty$-nél nagyobb eleme. Márpedig $H \subset \mathbb{R}$ miatt H minden eleme $-\infty$-nél nagyobb, így H-nak egyáltalán nem lehet eleme. Hasonló következtetésre juthatunk az $\inf H = +\infty$ esetben is, hiszen ekkor H-nak nem lehet $+\infty$-nél kisebb eleme. $\square$

Egyes állítások megfogalmazásának egyszerűbbé tétele érdekében célszerű elvégezni az alapműveletek részleges kiterjesztését is:

2.41. Definíció. *Legyen*

I. tetszőleges $x \in [-\infty, +\infty)$ *esetén* $x + (-\infty) := (-\infty) + x := -\infty$ *és tetszőleges* $x \in (-\infty, +\infty]$ *esetén* $x + (+\infty) := (+\infty) + x := +\infty$*;*

II. minden $x \in (-\infty, +\infty]$ *esetén* $(-\infty) - x := -\infty$*, minden* $x \in (-\infty, +\infty]$ *esetén* $x - (-\infty) := +\infty$*, minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $(+\infty) - x := +\infty$*, minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $x - (+\infty) := -\infty$*;*

III. minden $x \in [-\infty, 0)$ *esetén* $(-\infty) \cdot x := x \cdot (-\infty) := +\infty$, $(+\infty) \cdot x := x \cdot (+\infty) = -\infty$, *minden* $x \in (0, +\infty]$ *esetén* $(-\infty) \cdot x := x \cdot (-\infty) := -\infty$, $(+\infty) \cdot x := x \cdot (+\infty) := +\infty$,

IV. minden valós x *esetén* $x/(-\infty) := x/(+\infty) := 0$*, végül negatív* x *és pozitív* y *esetén* $(-\infty)/x := (+\infty)/y := +\infty$ *és* $(-\infty)/y := (+\infty)/x := -\infty$.

E megállapodások után a határérték és az alapműveletek közti kapcsolatokról szóló elemi tételek így foglalhatók össze:

2.42. Tétel. *Ha* $\lim(x_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim(y_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}$, $*$ *a négy alapművelet egyike, és elvégezhető az* $A * B$ *művelet, akkor az* $(x_n * y_n)$ *sorozatnak is van határértéke, és ez egyenlő* $A * B$*-vel.*

2.5. Határérték és egyenlőtlenségek

2.43. Tétel. *Tegyük fel, hogy* (x_n) *és* (y_n) *konvergens sorozatok, határértékük* A*, illetve* B*. I) Ha* $A < B$*, akkor van olyan küszöbindex, amelyiktől kezdve minden* n *pozitív egészre* $x_n < y_n$*; II) Ha van olyan küszöbindex, amelyiktől kezdve minden* n*-re* $x_n \leq y_n$*, akkor* $A \leq B$*.*

Bizonyítás. I) Vegyünk a határérték definíciója alapján az $\varepsilon := \frac{1}{2}(B - A)$ hibakorláthoz egy-egy küszöbindexet; a kettő közül a nagyobbik fölött minden n-re $x_n < A + \varepsilon = B - \varepsilon < y_n$.
II) Ha $B < A$ lenne, akkor az I) állításból – persze a két sorozat szerepének felcserélésével – azt kapnánk, hogy egy küszöbindextől kezdve minden n-re $y_n < x_n$ lenne, így a nagyobbik küszöbindextől kezdve minden n-re $x_n < x_n$ lenne. $\square$

2.44. Tétel (közrefogási elv). *Legyenek* (x_n), (y_n), (z_n) *számsorozatok és* A *valós szám. Ha*

(a) van olyan N_1 *küszöbindex, amelyiknél nagyobb* n*-ekre* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *és*

(b) $\lim(x_n) = \lim(z_n) = A$,

akkor $\lim(y_n) = A$.

Bizonyítás. Legyen ε tetszőleges pozitív szám, a határérték definíciója alapján válasszunk olyan N_2 és N_3 küszöbindexeket, amelyek fölött minden n-re $|x_n - A| < \varepsilon$, illetve $|z_n - A| < \varepsilon$. Ha $n > \max\{N_1, N_2, N_3\}$, akkor $A - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < A + \varepsilon$. $\square$

2.45. Következmény. *Minden egyes* p *pozitív szám esetén* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Bizonyítás. Az Arkhimédész-i axióma és annak egyik következménye szerint van olyan M_1 küszöbindex, amely fölött minden n-re $1/n < p < n$, vagyis

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{p} < \sqrt[n]{n}.$$

Korábban (2.9./III) bizonyítottuk, hogy az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat határértéke 1, így ugyanez mondható a reciprokáról is (2.24) , tehát ez a két sorozat játszhatja a (z_n) és az (x_n) szerepét. $\square$

2.46. Tétel (végtelen határértékre vonatkozó összehasonlító kritérium). *Ha az (x_n) sorozat határértéke $+\infty$, és valamely pozitív egész M-nél nagyobb n egészek mindegyikére $x_n \le y_n$, akkor az (y_n) sorozat is tart a $+\infty$-hez.*

Bizonyítás. Legyen K tetszőleges pozitív szám. (x_n) végtelenhez tartása miatt van olyan pozitív egész N, melynél nagyobb n-ek mindegyikére $K < x_n$, ezért minden olyan pozitív egész n-re, amely nagyobb, mint $\max\{M, N\}$, $K < x_n \le y_n$. $\square$

2.47. Tétel. *I) Ha az (a_n) sorozatnak van 1-nél nagyobb lokális alsó korlátja, akkor $\lim(a_n^n) = +\infty$,*
II) ha a $(|b_n|)$ sorozatnak van 1-nél kisebb lokális felső korlátja, akkor (b_n^n) nullsorozat,
III) ha (b_n) nullsorozat, akkor (b_n^n) is nullsorozat.

Bizonyítás. I) Legyen A az (a_n) sorozat 1-nél nagyobb lokális alsó korlátja; a 2.9/V) példa szerint alkalmazható az előző tétel az $x_n := A^n$, $y_n := a_n^n$ szereposztással.
II) Legyen q az $(|b_n|)$ sorozat 1-nél kisebb lokális felső korlátja és minden pozitív egész n-re $x_n := 0$, $y_n := |b_n|^n (= |b_n^n|)$ és $z_n := q^n$. A közrefogási elvből (2.44) és a 2.34. Példából először azt kapjuk, hogy a $|b_n^n|)$ sorozat tart a 0-hoz, majd ebből és a 2.23. Tételből azt, hogy a (b_n^n) sorozat is nullsorozat.
III) Nullsorozat abszolút értékének minden pozitív szám lokális felső korlátja, így speciálisan most minden $(0, 1)$-beli szám lokális felső korlátja a $(|b_n|)$ sorozatnak, tehát állításunk II)-ből következik.
$\square$

2.48. Következmény. *Minden $k \in \mathbb{Z}$, $q \in (-1, 1)$ és $a \in (1, +\infty)$ esetén $\lim(n^k q^n) = 0$ és $\lim(a^n n^{-k}) = +\infty$.*

Bizonyítás. Legyen minden pozitív egész n-re

$$b_n := q\left(\sqrt[n]{n}\right)^k,$$

és $A \in (q, 1)$. Az előző tétel szerint elég azt igazolni, hogy az A szám lokális felső korlátja a $(|b_n|)$ sorozatnak, hiszen $b_n^n = n^k q^n$. Ez $q = 0$ esetén nyilvánvaló. Ha $q \ne 0$, akkor a $|b_n| \le A$ egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^k \le \frac{A}{|q|}.$$

Minthogy a jobb oldalon álló tört 1-nél nagyobb, vagyis valamely pozitív ε mellett $1 + \varepsilon$ alakú, elég annyit bizonyítani a bal oldalon álló sorozatról, hogy 1-hez tart. Ez pozitív egész k esetén a 2.9/III) példából és a 2.20. Tételből, $k = 0$ esetén a 2.9/I) példából, míg negatív egész k esetén a már bizonyítottakból ($k > 0$ eset) és a reciprok határértékére vonatkozó tételből (2.24) következik.
Az $(a^n n^{-k})$ sorozat olyan pozitív tagú sorozat, amelynek reciproka az imént bizonyítottak szerint nullsorozat ($q := 1/a$), ezért valóban a $+\infty$-hez tart (2.33). $\square$

2.6. Középsorozatok

2.49. Definíció (középsorozatok). *Tetszőleges $x := (x_n)$ számsorozat számtaniközép-sorozatán az*

$$A_n := A_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

egyenlőségekkel értelmezett sorozatot, tetszőleges pozitív tagú (y_n) sorozat mértaniközép-sorozatán, illetve harmonikusközép-sorozatán a

$$G_n := G_n(y) := \sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}, \quad \textit{illetve a} \quad H_n := H_n(y) := \frac{n}{\frac{1}{y_1} + \ldots + \frac{1}{y_n}} \left(= \frac{1}{A_n(1/y)} \right)$$

egyenlőségekkel értelmezett sorozat értjük.

2.50. Tétel. *I) Ha az (x_n) sorozatnak van határértéke, és ez v, akkor az (A_n) számtaniközép-sorozat is tart v-hez.*

II) Ha a pozitív tagú (y_n) sorozatnak van határértéke, és ez v, akkor $\lim(G_n) = \lim(H_n) = v$.

Bizonyítás. I) Alkalmazzuk Stolz tételét az $a_n := x_1 + \ldots + x_n$, $b_n := n$ egyenlőségekkel értelmezett (a_n), (b_n) sorozatokra. (b_n) szigorúan monoton növő, felülről nem korlátos, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{1} = \lim_{n\to\infty} x_n = v,$$

tehát $\lim(a_n/b_n) = v$.
II) Ha a $+\infty$-t ebben a bizonyításban kivételesen a 0 szám reciprokának is nevezzük, és persze — mint általában is — a $+\infty$ reciprokán a 0-t értjük, akkor mondhatjuk, hogy az $1/y$ sorozat tart $1/v$-hez (2.24 és 2.33), így az I) részben bizonyítottak szerint a számtaniközép-sorozata is tart $1/v$-hez, ezért az utóbbi sorozat reciproka ismét v-hez tart.
A nevezetes közepekre vonatkozó egyenlőtlenségek szerint minden n-re $H_n \le G_n \le A_n$. Ezek után valós v esetén a közrefogási elvre hivatkozhatunk (2.44), $v = +\infty$ esetén pedig a 2.46. Tételre. □

2.51. Példa. $\lim(\sqrt[n]{n!}) = +\infty$, $\lim(1/\sqrt[n]{n!}) = 0$.

Bizonyítás vázlata. Az (n), illetve az $(1/n)$ sorozat mértaniközép-sorozatáról van szó. □

2.52. Következmény. *Minden valós x esetén $x^n/n! \to 0$.*

Bizonyítás. Az előző példa szerint $(x/\sqrt[n]{n!})$ nullsorozat, így az állítás a 2.47. Tétel III) állításából következik. □

2.53. Példa. $\lim(n/\sqrt[n]{n!}) = e$.

Bizonyítás vázlata. Ez a sorozat egy 1-hez tartó, és egy e-hez tartó sorozat szorzata, az előbbi az $(n/(n+1))$ sorozat, az utóbbi az $((1 + 1/n)^n)$ sorozat mértaniközép-sorozata:

$$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\prod_{k=1}^{n}k^k}} = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{\frac{\prod_{k=2}^{n+1}k^{k-1}}{\prod_{k=1}^{n}k^k}} = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}.$$

□

2.7. Monoton sorozat korlátossága és határértéke

2.54. Tétel. *Monoton növő [fogyó] és felülről [alulról] korlátos sorozat konvergens, határértéke megegyezik értékkészletének felső [alsó] határával. Minden olyan korlátos sorozat is konvergens, amelynek valamely pozitív egész M mellett a $\mathbb{Z} \cap [M, +\infty)$ halmazra való leszűkítése monoton.*

Bizonyítás. Legyen például (x_n) monoton növő (a monoton fogyó sorozatok hasonlóan vizsgálhatók), A a sorozat értékkészletének felső határa és ε tetszőleges pozitív szám. $A - \varepsilon$ (lévén A-nál kisebb) nem felső korlátja a sorozat értékkészletének, így van olyan N pozitív egész, melyre $A-\varepsilon < x_N$, innen—a sorozat monoton növő voltából és az A szám felső korlát voltából—következik, hogy ha $n > N$, akkor

$$A - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq A < A + \varepsilon.$$

Ha valamely pozitív egész M mellett az (x_n) sorozatnak a $\mathbb{Z} \cap [M, +\infty)$ halmazra való leszűkítése monoton, akkor az $n \mapsto x_{n+M-1}$ sorozat korlátos és monoton, tehát a már bizonyítottak szerint konvergens, de az új sorozatból véges számú olyan változtatással (új tag betoldása) visszakaphatjuk az eredeti sorozatot, amelyek konvergens sorozatból konvergens sorozatot állítanak elő (lásd a 2.11. Tételt). □

2.55. Példa. $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$

Bizonyítás. Ez az iménti tétel egyszerű következménye, hiszen a sorozat (szigorúan) monoton növő és értékkészletének felső határa egyenlő e-vel (lásd az 1.37. Definíciót és az azt megelőző állítást). □

2.56. Példa. $\lim(\sum_{i=0}^{n} 1/i!) = e.$

Bizonyítás. Vezessük be az $x_n := (1 + 1/n)^n$, $y_n := \sum_{i=0}^{n} 1/i!$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ jelöléseket. Az előző példa és a közrefogási elv alapján elég azt igazolni, hogy minden n-re $x_n \leq y_n \leq e$. $x_1 = y_1 (= 2)$, ha $n > 1$, akkor a binomiális tételből és a binomiális együttható definíciójából ezt kapjuk:

$$x_n = 2 + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) < 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!} = y_n.$$

Ha valamely N pozitív egészre $e < y_N$ volna, akkor abból, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left[2 + \sum_{i=2}^{N} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[2 + \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i!} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] = y_N$$

(konvergens sorozatok összege konvergens, az összeg limesze egyenlő a limeszek összegével), adódna olyan N-nél nagyobb m egész létezése, amelyre már ennek a sorozatnak az m-edik tagja is nagyobb volna e-nél, így ez még inkább igaz volna x_m-re (lásd x_m-nek az előző formulából kiolvasható, a binomiális tétel segítségével történő előállítását), ami viszont lehetetlen, mert az (x_n) monoton növő, határértéke e, tehát minden tagja kisebb-egyenlő e-nél. □

2.57. Feladat. *I) Bizonyítandó, hogy ha (a_n) és (b_n) a Cantor-féle axióma feltételeinek eleget tevő sorozatok, akkor mindkét sorozat konvergens és $\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$,*

II) Bizonyítandó, hogy ha (a_n) és (b_n) a Cantor-féle közösponttétel feltételeinek eleget tevő sorozatok, akkor mindkét sorozat konvergens és határértékeik egymással egyenlők.

2.58. Tétel. *Minden monoton növő, felülről nem korlátos sorozat tart a $+\infty$-hez, minden monoton fogyó, alulról nem korlátos sorozat tart a $-\infty$-hez.*

Bizonyítás. Legyen például (x_n) monoton növő és $K > 0$. K nem felső korlátja a sorozatnak, ezért van olyan pozitív egész N, melyre $K < x_N$, s minthogy a sorozat monoton növő, minden N-nél nagyobb n esetén $K < x_N \leq x_n$. □

2.59. Következmény. *Minden monoton sorozatnak van határértéke, ez növő sorozat esetén a sorozat értékkészletének felső határával, fogyó sorozat esetén az alsó határával egyenlő.*

2.60. Példa. $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\right) = +\infty$.

Bizonyítás. A sorozat nyilván szigorúan monoton növő: az $n+1$-edik é s az n-edik tag különbsége minden n-re $1/(n+1) > 0$. Indirekt úton bizonyítjuk ennek a sorozatnak a felülről nem korlátos voltát: ha korlátos volna és az értékkészletének a felső határa az A szám volna, akkor az $A - 1/2$ szám már nem volna felső korlát, ezért volna olyan M pozitív egész, melyre $A - 1/2 < \sum_{k=1}^{M} 1/k$. Ezek után elég az $1/2 \leq \sum_{k=M+1}^{2M} 1/k$ egyenlőtlenséget igazolni, hiszen ezt hozzáadva az előzőhöz, azt a képtelenséget kapnánk, hogy a sorozat $2M$-ik tagja nagyobb a sorozat értékkészletének egy felső korlátjánál, A-nál. Márpedig az utóbbi egyenlőtlenség bizonyítása céljából nem kell mást tenni, mint $k \in \overline{M+1\,,\,2M}$-re összegezni az $1/(2M) \leq 1/k$ egyenlőtlenségeket. A sorozatunk tehát felülről nem korlátos és monoton növő, így a 2.58. Tétel szerint valóban tart a $+\infty$-hez. □

2.61. Megjegyzés. *Az előző tételben a monotonitási feltétel enyhíthető: elég, ha valamely pozitív egész M mellett a sorozatnak az $\mathbb{Z} \cap [M, +\infty)$ halmazra való leszűkítése monoton növő, illetve fogyó.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításán alig kell változtatni: ha például a leszűkített sorozat monoton növő és $K > 0$, akkor ezúttal olyan N pozitív egészt vegyünk, amelyre

$$x_N > \max\{K, x_1, \ldots, x_{M-1}\},$$

ekkor szükségképpen $N \geq M$, ezért ismét mondhatjuk, hogy minden N-nél nagyobb n-re $K < x_N \leq x_n$. □

2.8. A konvergencia két szükséges és elégséges feltétele

Az alábbi definíció előkészítése céljából először néhány egyszerű észrevételt teszünk:

2.62. Állítás. *Rögzített (x_n) sorozat mellett képezzük az*

$$n \mapsto \inf\{x_k \,:\, k \geq n\} =: a_n, \qquad n \mapsto \sup\{x_k \,:\, k \geq n\} =: b_n$$

sorozatokat. I) Ha (x_n) alulról nem korlátos, akkor minden pozitív egész n-re $a_n = -\infty$, ha (x_n) felülről nem korlátos, akkor minden pozitív egész n-re $b_n = +\infty$; II) ha (x_n) alulról korlátos, akkor (a_n) monoton növő számsorozat, ha (x_n) felülről nem korlátos, akkor (b_n) monoton fogyó számsorozat.

Bizonyítás. I) Ha valamely n-re a_n, illetve b_n valós szám lenne, akkor minden ilyen n-re a_n lokális alsó korlátja, illetve b_n lokális felső korlátja lenne az (x_n) sorozatnak, tehát az 1.62. Lemma szerint (x_n) sorozat alulról, illetve felülről korlátos lenne.
II) Ha az X, Y számhalmazokra $X \subset Y$, akkor $\inf X \geq \inf Y$ és $\sup X \leq \sup Y$. Emiatt – lévén az $n \mapsto \{x_k \,:\, k \geq n\} =: H_n$ halmazsorozat tartalmazásra nézve monoton fogyó – az $X := H_{n+1}$, $Y := H_n$ szereposztással adódik, hogy minden n-re $a_{n+1} \geq a_n$ és $b_{n+1} \leq b_n$. □

2.63. Definíció (számsorozat alsó/felső határértéke). *Legyen (x_n) tetszőleges valós számsorozat és használjuk az előző Állításban szereplő jelöléseket. (x_n) alsó határértékén (vagy limesz inferiorján) alulról korlátos (x_n) esetén az $\{a_n\}$ számhalmaz felső határát, alulról nem korlátos (x_n) esetén a $-\infty$-t értjük. (x_n) felső határértékén (vagy limesz szuperiorján) felülről korlátos (x_n) esetén a $\{b_n\}$ számhalmaz alsó határát, ellenkező esetben a $+\infty$-t értjük. Jelölés:* $\liminf(x_n)$, *vagy* $\liminf_{n\to\infty} x_n$, *illetve* $\limsup(x_n)$ *vagy* $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

2.64. Megjegyzés. *Ebben a definícióban a 2.59. Következmény szerint* $\sup\{a_n\}$ *helyett* $\lim(a_n)$, *és* $\inf\{b_n\}$ *helyett* $\lim(b_n)$ *is írható. Nyilván minden pozitív egész n-re $a_n \le b_n$, ebből korlátos (x_n) esetén a 2.43. Tétel alapján, nem korlátos (x_n) esetén pedig a 2.4. szakaszban mondottak alapján következik, hogy* $\liminf(x_n) \le \limsup(x_n)$.

2.65. Megjegyzés. *Tekintettel a 2.39. Megjegyzésre, illetve arra tényre, hogy* $\sup\{-\infty\} = -\infty$ *és* $\inf\{+\infty\} = +\infty$, *az iménti definícióban fölösleges az esetszétválasztás.*

2.66. Példa. $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = 1$, $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.

A konvergencia alább tárgyalandó szükséges és elégséges feltételének megfogalmazása előtt érdemes fontolóra venni a következőket. Ha az (x_n) sorozat konvergens és határértéke az A, akkor minden egyes k pozitív egész esetén az $n \mapsto x_{n+k}$ sorozatról ugyanezt állíthatjuk (adott ε hibakorláthoz választhatjuk ugyanazt a küszöbindexet, mint az (x_n) sorozat esetében, vagy akár egy ennél legfeljebb k-val kisebb pozitív egészt is). Tehát ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor az $n \mapsto x_{n+k} - x_n$ sorozatok mindegyike nullsorozat. Ez utóbbi állítás megfordítása viszont nem igaz: ellenpélda a $(\sum_{i=1}^{n} 1/i)$ sorozat. Ha a konvergenciának ezen a szükséges feltételén még egy keveset változtatunk, akkor kapjuk a konvergencia Cauchy-féle feltételét, amely már egyszerre szükséges és elégséges:

2.67. Definíció. *Az a kijelentés, hogy az (x_n) sorozat teljesíti a Cauchy-féle konvergenciafeltételt, a következőt jelenti: minden egyes ε pozitív számhoz található olyan N pozitív egész, hogy az $N < m$, $N < n$ feltételeknek eleget tevő $(m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ párok mindegyikére $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

2.68. Tétel. *Tetszőleges (x_n) valós számsorozat esetén az alábbi három kijelentés egymással egyenértékű: 1) (x_n) konvergens, 2) (x_n) teljesíti a Cauchy-féle konvergenciafeltételt, 3) (x_n) korlátos, és felső határértéke egyenlő az alsó határértékével.*

Bizonyítás. 1)$\Rightarrow$2). Legyen ε tetszőleges pozitív szám, és jelöljük A-val az (x_n) sorozat határértékét. A határérték definíciója alapján válasszunk egy olyan N küszöbindexet, amelynél nagyobb pozitív egész n-ek mindegyikére $|x_n - A| < \varepsilon/2$. Ezek szerint ha a pozitív egész m, n számok nagyobbak N-nél, akkor

$$|x_m - x_n| < |(x_m - A) + (A - x_n)| \le |x_m - A| + |A - x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

2)$\Rightarrow$3). A Cauchy-féle konvergenciafeltételt az $\varepsilon = 1$ hibakorláttal alkalmazva adódik egy olyan N pozitív egész létezése, amelynél nagyobb m, n egészekre $|x_n - x_m| < 1$, azaz $x_m - 1 < x_n < x_m + 1$. Ebből következik, hogy bármely N-nél nagyobb m egészt véve (legyen például $m := N + 1$), $x_m - 1$ lokális alsó, míg $x_m + 1$ lokális felső korlátja a sorozatnak, tehát a sorozat korlátos (1.62).
Indirekt úton folytatjuk: ha $\liminf(x_n) < \limsup(x_n)$ volna, akkor alkalmazhatnánk a Cauchy-féle feltételt az $\varepsilon := (\limsup(x_n) - \liminf(x_n))/3$ hibakorláttal: létezne olyan N pozitív egész, melyre $m > N$, $n > N$ esetén $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Ebből a következő módon juthatunk ellentmondásra: a 2.62. Állításban bevezetett jelöléseket használva, rögzítsünk egy tetszőleges N-nél nagyobb m egészt,

majd – az a_m, b_m számok definíciójára támaszkodva – olyan m-nél nem kisebb k, l egészeket, melyekre $x_k > b_m - \varepsilon$ és $x_l < a_m + \varepsilon$. Ekkor

$$\varepsilon > |x_k - x_l| \geq x_k - x_l > (b_m - \varepsilon) - (a_m + \varepsilon) = b_m - a_m - 2\varepsilon \geq \limsup(x_n) - \liminf(x_n) - 2\varepsilon = \varepsilon.$$

3)⇒1). A közrefogási elvből és az $a_n \leq x_n \leq b_n$ egyenlőtlenségekből következik, hogy az (x_n) sorozat tart az (a_n), (b_n) sorozatok közös határértékéhez. □

A tétel 3)⇒1) részét kiegészítve, az alábbit is állíthatjuk:

2.69. Tétel. *Tetszőleges (x_n) valós számsorozat és $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén az alábbi két állítás egymással egyenértékű: 1) $\lim(x_n) = A$, 2) $\liminf(x_n) = \limsup(x_n) = A$; következésképp egy valós számsorozatnak pontosan akkor van határértéke, ha alsó határértéke egyenlő a felső határértékével.*

Bizonyítás. 1)⇒2). Tegyük fel először, hogy A valós szám. Legyen ε tetszőleges pozitív szám, N pedig olyan pozitív egész, amelynél nagyobb k egészek mindegyikére $A - \varepsilon/2 < x_k < A + \varepsilon/2$. Ekkor tehát $n > N$ esetén

$$A - \varepsilon < A - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\} \leq A + \frac{\varepsilon}{2} < A + \varepsilon,$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = A.$$

Tegyük fel most, hogy $A = +\infty$. Legyen K tetszőleges pozitív szám, N pedig olyan pozitív egész, amelynél nagyobb k egészek mindegyikére $x_k > K + 1$. Ekkor tehát $n > N$ esetén

$$K < K + 1 \leq \inf\{x_k : k \geq n\} \leq \sup\{x_k : k \geq n\},$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = +\infty.$$

Az $A = -\infty$ eset teljesen hasonlóan tárgyalható.

2)⇒1). Házi feladat (a definíciók egyszerű következménye). □

2.9. Részsorozatok, a Bolzano–Weierstrass-tétel

2.70. Definíció (indexsorozat, részsorozat). *Indexsorozaton pozitív egész értékű szigorúan monoton növő sorozatot értünk; egy (x_n) sorozat részsorozatain pedig azokat a sorozatokat, amelyek előállnak az (x_n) sorozat, mint külső függvény, és egy indexsorozat, mint belső függvény kompozíciójaként.*

Egyszerű példák indexsorozatra: $(2n)$, $(2n-1)$, (2^n), (n^2), stb.

2.71. Lemma. *Ha $(n_k) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ indexsorozat, akkor minden k pozitív egész esetén $n_k \geq k$.*

Bizonyítás. Teljes indukciót alkalmazunk. n_1 pozitív egész, ezért nem kisebb 1-nél. Az indexsorozat szigorúan monoton növő és egész értékű, tehát ha $n_k \geq k$, akkor $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$. □

2.72. Tétel. *Ha egy sorozat konvergens és határértéke A, akkor minden részsorozata is konvergál az A számhoz.*

Bizonyítás. Ha $A = \lim(x_n)$, (n_k) tetszőleges indexsorozat, ε tetszőleges pozitív szám és az M küszöbindex fölött minden m pozitív egész esetén $|x_m - A| < \varepsilon$, akkor ugyanezen küszöbindex fölött minden k pozitív egész számra – minthogy a segédtétel miatt n_k sem kisebb ennél a küszöbindexnél – $|x_{n_k} - A| < \varepsilon$. □

A tétel alábbi kiterjesztésének bizonyítása házi feladat:

2.73. Állítás. *Ha egy sorozatnak van határértéke, és ez egyenlő A-val, akkor minden részsorozatának határértéke szintén A.*

2.74. Lemma. *Minden valós számsorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen (x_n) tetszőleges számsorozat, és legyen

$$H := \{n \in \mathbb{Z}^+ : \forall m \in (n, +\infty) \cap \mathbb{Z} \quad x_m \leq x_n\}.$$

Ha H végtelen, akkor H elemeiből alkotható egy szigorúan monoton növő sorozat: legyen n_1 a H legkisebb eleme, n_2 a H legkisebb n_1-től különböző eleme, n_3 a $H \setminus \{n_1, n_2\}$ halmaz legkisebb eleme, és így tovább (az eljárás vég nélkül folytatható). Minthogy minden k pozitív egészre $n_k \in H$ és $n_k < n_{k+1}$, H definíciója szerint $x_{n_{k+1}} \leq x_{n_k}$, tehát az (x_{n_k}) részsorozat monoton fogyó.
Ha H véges, akkor rekurzív módon értelmezünk egy olyan indexsorozatot, amelynek egyetlen tagja sincs a H halmazban, s amelyhez tartozó részsorozat szigorúan monoton növő. Ha H véges és nemüres, akkor legyen n_1 a H legnagyobb eleménél (például eggyel) nagyobb egész, ha $H = \emptyset$, akkor legyen $n_1 := 1$. Mindkét esetben evidens, hogy az n_1-nél nagyobb egészek egyike sincs H-ban. Ha az indexsorozat k-adik tagját már értelmeztük, akkor – lévén $n_k \in \mathbb{Z}^+ \setminus H$ – van olyan n_k-nál nagyobb m egész, melyre $x_m > x_{n_k}$, az ilyen tulajdonságú m egészek legkisebbike legyen n_{k+1}. □

Sorozatok korlátosságának és konvergenciájának kapcsolatát illetően eddig két tényt ismertünk meg: először azt, hogy minden konvergens sorozat korlátos de nem minden korlátos sorozat konvergens, másodszor azt, hogy minden korlátos és monoton sorozat konvergens. Az alábbi tétel ezt a témakört zárja le.

2.75. Tétel (Bolzano–Weierstrass). *Minden korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Az imént bizonyított lemma alapján vegyük a sorozatnak egy monoton részsorozatát; nyilván ez is korlátos, tehát a 2.54. Tétel szerint konvergens. □

2.76. Megjegyzés. *Minthogy minden monoton sorozatnak van határértéke (2.59. Következmény), az iménti lemmából arra is következtethetünk, hogy minden sorozatnak van olyan részsorozata, amelynek van határértéke. Azt is könnyű igazolni, hogy minden alulról nem korlátos sorozatnak van $-\infty$-hez tartó, és minden felülről nem korlátos sorozatnak van $+\infty$-hez tartó részsorozata. Az utóbbi általánosításaképp a következőt is állíthatjuk: minden valós számsorozatnak van két olyan részsorozata, amelyek egyike tart a sorozat alsó, másika a sorozat felső határértékéhez. Sőt, az is igaz, hogy a sorozat alsó, illetve felső határértéke a legkisebb, illetve a legnagyobb olyan $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem, amely előáll a sorozat valamely részsorozatának határértékeként.*

2.77. Megjegyzés. *A Bolzano–Weierstrass-tétel segítségével újabb bizonyítás adható arra, hogy ha egy sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt, akkor konvergens, mégpedig olyan bizonyítás, amely nem használja sem az alsó, sem a felső határérték fogalmát: a Cauchy-féle feltételből először arra lehet következtetni, hogy a sorozat (lokálisan) korlátos, ebből arra, hogy egy részsorozata konvergens, majd meg kell mutatni, hogy az egész sorozat tart a konvergens részsorozatának határértékéhez. A részleteket illetően lásd az előadást.*

3. VÉGTELEN SOROK

3.1. Alapfogalmak, a végtelen mértani sor, további példák

Az analízisnek a „végtelen sorok” című fejezete abból a problémából fejlődött ki, hogy mit értsünk végtelen sok tagú összegen. Ezzel a problémával az ember általában a végtelen tizedestörtekkel való ismerkedés közben találkozik először. Azt például minden érettségizőnek tudnia kell, hogy

$$0,\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots = \frac{1}{3},$$

vagy azt, hogy

$$0,\dot{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 1$$

— anélkül, hogy a középen álló végtelen sok tagú összegek jelentésével pontosan tisztában lehetne.

Általában, ha (x_n) tetszőleges valós számsorozat, akkor kézenfekvő a következő módon próbálni értelmet adni az

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots$$

végtelen összegnek: képezzük azt az újabb sorozatot, amelynek n-edik tagja egyenlő a $\sum_{k=1}^{n} x_k$ összeggel, és ha ennek van határértéke, akkor a végtelen sok tagú összeg definíció szerint legyen egyenlő ezzel a határértékkel.

Mint látni fogjuk, annak, hogy hogyan definiáljuk a végtelen sor fogalmát, semmi jelentősége nem lesz; ugyanis külön-külön fogunk értelmet adni mindazoknak a kifejezéseknek, illetve mondatfajtáknak, amelyekben a „végtelen sor” szókapcsolat előfordul. Ennek ellenére megadjuk a végtelen sor fogalmának *egy lehetséges* definícióját:

3.1. Definíció. *Az (x_n) számsorozatból képezett végtelen soron azt a rendezett párt értjük, amelynek első komponense az (x_n) sorozat, második komponense pedig az az (s_n) sorozat, melyre minden n esetén $s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$. Az (x_n) sorozatból képezett végtelen sornak — melynek jelölésére a $\sum(x_n)$ szimbólumot használjuk — az n-edik tagja az x_n szám, n-edik részletösszege az s_n szám, részletösszeg-sorozata az (s_n) sorozat.*

3.2. Definíció. *Egy végtelen sort attól függően nevezünk konvergensnek, illetve divergensnek, hogy részletösszeg-sorozata konvergens vagy divergens.*

3.3. Definíció. *Ha a $\sum(x_n)$ végtelen sor részletösszeg-sorozatának van (véges vagy végtelen) határértéke, akkor ezt a határértéket a végtelen sor összegének nevezzük, és a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ szimbólummal jelöljük.*

3.4. Megjegyzés. *Végtelen sort nem csak a $\mathbb{Z}^+$ halmazon értelmezett sorozatokból képezhetünk: tetszőleges M nemnegatív egész esetén az $[M, +\infty) \cap \mathbb{Z}$ halmazon értelmezett (x_n) sorozatokból is; ekkor persze a fenti szummák mindegyikében $k = 1$ helyett $k = M$-től indul az összegzés, és a részletösszeg-sorozat értelmezési tartománya ugyanaz, mint az (x_n) sorozaté.*

3.5. Tétel. *A (q^n) sorozatból képezett végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha a q valós szám abszolút értéke kisebb, mint 1; minden $q \in (-1, +1)$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Bizonyítás. A mértani sorozat első $n+1$ tagjának összegére vonatkozó képlet szerint minden nemnegatív egész n esetén az n-edik (n indexű) részletösszeg

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{ha } q \neq 1, \\ n+1, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$

Innen a részletösszeg-sorozatra vonatkozóan leolvasható először is az, hogy $q = 1$ esetén divergens (határértéke $+\infty$), másodszor az, hogy $q \neq 1$ esetén pontosan akkor konvergens, amikor az $(1-q^{n+1})$ sorozat, vagyis ha $|q| < 1$, harmadszor az, hogy amikor konvergens (és persze továbbra is $q \neq 1$), lévén ebben az esetben $\lim(q^{n+1}) = 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q},$$

amivel a tétel bizonyítását befejeztük. □

3.6. Megjegyzés. *Teljesen hasonlóan bizonyítható (vagy akár következménynek is tekinthető), hogy a $\sum(a \cdot q^n)$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha $a = 0$ vagy $|q| < 1$; továbbá, hogy tetszőleges a valós szám és $q \in (-1, +1)$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad \textit{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{a \cdot q}{1-q}.$$

A fejezet két bevezető példájában éppen ez utóbbi állítás két speciális esetével találkoztunk, q értéke mindkét példában $1/10$, a értéke az elsőben 3, a másodikban 9 volt.

3.7. Definíció. *Ha $a \in$ és $q \in$, akkor az $(a \cdot q^n)$ sorozatból képezett végtelen sort végtelen mértani sornak nevezzük.*

A következő két példában régi ismerőseinket láthatjuk viszont – új köntösben (lásd a 2.60. és a 2.56. Példát).

3.8. Példa. *Az $(1/n)$ sorozatból képezett végtelen sor (az úgynevezett harmonikus sor) divergens.*

3.9. Példa. *Az $(1/n!)$ sorozatból képezett végtelen sor konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

3.2. A konvergencia szükséges feltétele, a Cauchy-féle feltétel, abszolút konvergencia

Az alábbi tétel szerint konvergens végtelen sort csak nullsorozatból lehet képezni.

3.10. Tétel. *Ha az (x_n) sorozatból képezett végtelen sor konvergens,akkor* $\lim(x_n) = 0$.

Bizonyítás. Az n-edik részletösszeget szokás szerint s_n-nel jelölve, mind az (s_n), mind az (s_{n-1}) sorozat tart a végtelen sor összegéhez, emiatt a különbségük — a (x_n) sorozat — tart a nullához. □

Az imént említett $\sum(1/n)$ sor példája mutatja, hogy a $\lim(x_n) = 0$ feltétel csak szükséges, de nem elégséges feltétele a $\sum(x_n)$ végtelen sor konvergenciájának. Ezzel szemben a most bizonyítandó Cauchy-féle konvergenciafeltétel egyszerre szükséges is és elégséges is:

3.11. Tétel. *A $\sum(x_n)$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, haminden egyes ε pozitív számhoz található olyan M pozitív egész, hogy az $M < m < n$ feltételeknek eleget tevő és egészekből álló (m,n) párokra*

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az utóbbi egyenlőtlenség bal oldalán $|s_n - s_m|$ áll, és alkalmazzuk az (s_n) sorozatra a számsorozatok konvergenciájáról szóló Cauchy-féle feltételt; ekkor éppen azt kapjuk, amit akartunk, hiszen ha az $|s_n - s_m| < \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül az $M < m < n$ feltételeknek eleget tevő párokra, akkor $|s_m - s_n| = |s_n - s_m|$, illetve $|s_m - s_m| = 0$ miatt teljesül az $M < m$, $M < n$ feltételeknek eleget tevő összes $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$-beli (m,n) párra. $\square$

3.12. Definíció. *A $\sum(x_n)$ végtelen sort akkor nevezzük abszolút konvergensnek, ha a $\sum(|x_n|)$ végtelen sor konvergens.*

3.13. Tétel. *Minden abszolút konvergens végtelen sor konvergens.*

Bizonyítás. Ha $\sum(|x_n|)$ konvergens és ε tetszőleges pozitív szám, akkor az előző tétel (mint szükséges feltétel) szerint van olyan M pozitív egész, hogy az $M < m < n$ feltételeknek eleget tevő és egészekből álló (m,n) párokra

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} |x_k|\right| \;<\; \varepsilon;$$

itt a bal oldal – ahol a külső abszolútértékjel elhagyható – a háromszög-egyenlőtlenség alapján alulról becsülhető a

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right|$$

számmal, tehát a Cauchy-féle feltételből, mint elégséges feltételből adódik, hogy a $\sum(x_n)$ sor konvergens. $\square$

3.14. Megjegyzés. *A most bizonyított tétel nem fordítható meg: a hamarosan bizonyítandó Leibniz-tételből (3.28. Tétel) következik, hogy például a $((-1)^n/n)$ sorozatból képezett végtelen sor konvergens, de – mint már tudjuk – nem abszolút konvergens.*

Most néhány olyan megjegyzést teszünk, amelyek – legalább részlegesen – megvilágíthatják a „megszámlálhatóan végtelen sok tagú összeg” fogalmát, nevezetesen azt a kérdést, hogy lehet-e ezt az összeget olymódon értelmezni, hogy számértéke ne függjön a tagok sorrendjétől. Nevezzük a $\sum(x_n)$ végtelen sor *átrendezése*inek az olyan (x_{p_n}) alakú sorozatokból képezett végtelen sorokat, amelyekre a (p_n) sorozat a pozitív egész számok halmazának önmagára való injektív leképezése, és nevezzünk egy végtelen sort *feltételesen konvergens*nek, ha konvergens, de nem abszolút konvergens. Mármost bizonyítható egyrészt az, hogy egy végtelen sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha minden átrendezése konvergens (egyébként ekkor minden átrendezésének ugyanannyi az összege), másrészt az, hogy minden $c \in \overline{\mathbb{R}}$-hoz és minden feltételesen konvergens végtelen sorhoz megadható ennek a végtelen sornak olyan átrendezése, amelynek összege éppen c-vel egyenlő, sőt olyan átrendezése is, melynek nincs összege.

3.3. Végtelen sor konvergenciája és az alapműveletek

3.15. Tétel. *Ha az (x_n) sorozatból képezett végtelen sor konvergens és c tetszőleges valós szám, akkor $\sum(cx_n)$ is konvergens és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cx_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Bizonyítás. A $\sum(cx_n)$ végtelen sor részletösszeg-sorozata éppen a c-szerese a $\sum(x_n)$ végtelen sor részletösszeg-sorozatának, tehát alkalmazható a konvergens sorozat konstansszorosáról szóló tétel. □

3.16. Tétel. *Ha mind az (x_n), mind az (y_n) sorozatból képezett végtelen sor konvergens, akkor ugyanez mondható az $\sum(x_n + y_n)$ végtelen soról is, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

Bizonyítás. A $\sum(x_n + y_n)$ végtelen sor részletösszeg-sorozata egyenlő az

$$n \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

sorozattal, tehát konvergens, és határértéke egyenlő a másik két részletösszeg-sorozat határértékének összegével. □

3.17. Megjegyzés. *Egy $(x_n y_n)$ alakú sorozatból képezett végtelen sor konvergenciájához nem elegendő a $\sum(x_n)$ és $\sum(y_n)$ végtelen sorok konvergenciája. Leibniz később bizonyítandó tételéből (3.28. Tétel) következik például, hogy $\sum\left((-1)^n/\sqrt{n}\right)$ konvergens, ebből és az 3.8. Példából következik, hogy $x_n := y_n := (-1)^n/\sqrt{n}$ jó ellenpélda.*
A Cauchy-féle kritérium kétszeri alkalmazásával – szükséges feltételként az $(|y_n|)$, elégséges feltételként az $(|x_n y_n|)$ sorozatból képezett végtelen sorra alkalmazva – igazolható viszont, hogy ha (x_n) korlátos és $\sum(y_n)$ abszolút konvergens, akkor $\sum(x_n y_n)$ abszolút konvergens.

3.4. A konvergencia elégséges feltételei

Az alábbi tételt összehasonlító (konvergencia)kritériumnak, majoráns kritériumnak, vagy Weierstrass-kritériumnak szokták nevezni.

3.18. Tétel. *Ha az (x_n) és (y_n) sorozatokra teljesül a következő két feltétel:*
(a) valamely M_1 küszöbindex fölötti minden egyes n egészre $|x_n| \le y_n$,
(b) a $\sum(y_n)$ végtelen sor konvergens,
akkor a $\sum(x_n)$végtelen sor abszolút konvergens.

Bizonyítás. A Cauchy-féle feltételt, mint elégséges feltételt (3.11) fogjuk alkalmazni az $(|x_n|)$ sorozatra. Legyen tehát ε tetszőleges pozitív szám; a (b) feltételből és a 3.11. Tételből, mint szükséges feltételből következik egy olyan M_2 küszöbindex létezése, melyre az $M_2 < m < n$ feltételeknek eleget tevő minden egyes (m, n) indexpár teljesíti a

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} y_k \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Legyen $\max\{M_1, M_2\} =: M < m < n$; ekkor

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} |x_k|\right| = \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} y_k = \left|\sum_{k=m+1}^{n} y_k\right| < \varepsilon$$

– kihasználva, hogy az $|x_k|$, valamint a náluk nem kisebb y_k számok nemnegatívak. $\square$

Az alábbi tételt összehasonlító (divergencia)kritériumnak, vagy minoráns kritériumnak nevezzük.

3.19. Tétel. *Ha az (x_n) és (y_n) sorozatokra teljesül a következő két feltétel:*
(a) valamely M küszöbindex fölött minden n egészre $x_n \leq y_n$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$,
akkor $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = +\infty$.

Bizonyítás. Azt bizonyítjuk, hogy az (y_n) sorozat részletösszeg-sorozatának tagjai (az M+1 küszöbindextől kezdve) alulról becsülhetők egy $+\infty$-hez tartó sorozat ugyanolyan indexű tagjaival, éspedig az (x_n) sorozat részletösszeg-sorozatának és egy konstans sorozatnak az összegével: ha $n > M$ egész, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \geq \sum_{k=1}^{M} y_k + \sum_{k=M+1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{M} (y_k - x_k) + \sum_{k=1}^{n} x_k\,,$$

tehát az iménti állításunk valóban teljesül. $\square$

3.20. Példa (hiperharmonikus sorok). *A $\sum(1/n^p)$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha a p kitevő 1-nél nagyobb.*

Bizonyítás. Ha $p \leq 1$, akkor a minden pozitív egész n esetén fennálló $1/n \leq 1/n^p$ egyenlőtlenségből és az előző tételből következik a vizsgált végtelen sor divergenciája: $x_n := 1/n$, $y_n := 1/n^p$.
Ha $p > 1$, akkor elég a – nyilván monoton növő – (S_n) részletösszeg-sorozat felülről korlátos voltát bizonyítani. Ehhez viszont elég, ha az (S_{2^n-1}) részsorozat felülről korlátosságát igazoljuk (ugyanis $(2^n - 1)$ indexsorozat volta miatt $n \leq 2^n - 1$ és (S_n) monoton növő):

$$S_{2^n-1} = 1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) + (\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}) + \cdots + (\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^p}),$$

ha itt az egy-egy zárójelpáron belül lévő tagok mindegyikét az első taggal becsüljük fölülről, akkor azt kapjuk, hogy

$$S_{2^n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{n-1} (2^{1-p})^k = \frac{1-(2^{1-p})^n}{1-2^{1-p}} < \frac{1}{1-2^{1-p}},$$

tehát valóban találtunk felső korlátot. $\square$

A következő tételt gyökkritériumnak szokták nevezni.

3.21. Tétel. *Legyen (x_n) valós számsorozat;*
I. ha létezik olyan 1-nél kisebb q szám és M küszöbindex, amelynél nagyobb n egészek mindegyikére $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$, akkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor abszolút konvergens,
II. ha végtelen sok n-re $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$, akkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor divergens, sőt, (x_n) nem nullsorozat.

Bizonyítás. I. A tétel feltétele szerint van olyan $q \in (0,1)$ és M küszöbindex, melynél nagyobb n egészek mindegyikére $|x_n| \le q^n$, így a tétel első állítása az összehasonlító kritériumból következik.

II. A feltétel szerint minden pozitív egész M-hez található olyan M-nél nem kisebb n, melyre $\sqrt[n]{|x_n|} \ge 1$, azaz $|x_n| \ge 1$, ezért (x_n) nem lehet nullsorozat ($\varepsilon = 1$-hez nincs jó küszöbindex). $\square$

Az alábbi, hányadoskritériumnak nevezett tételben a vizsgált végtelen sor abszolút konvergenciája ismét egy konvergens mértani sorral való majorálhatóságból következik.

3.22. Tétel. *Ha az (x_n) sorozat minden tagja nullától különböző, és létezik olyan M küszöbindex,*

I. továbbá egy olyan 1-nél kisebb q szám, melyre az M-nél nagyobb n egészek esetén $|x_{n+1}/x_n| \le q$, akkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor abszolút konvergens,

II. melynél nagyobb n egészek mindegyikére $|x_{n+1}/x_n| \ge 1$, akkor a $\sum(x_n)$ végtelen sor divergens, sőt, (x_n) nem nullsorozat.

Bizonyítás. I. Legyen $q \in (0,1)$ és $M \in \mathbb{Z}^+$ olyan, hogy minden M-nél nagyobb k egész esetén $|x_{k+1}/x_k| \le q$, azaz $|x_{k+1}| \le q \cdot |x_k|$. Ha az így adódó egyenlőtlenséget valamely M-nél nagyobb n esetén felírjuk minden egyes $k \in \overline{M, n-1}$ egészre, majd az utóbbiakat összeszorozzuk, végül a közös tényezőket mindkét oldalról elhagyjuk, akkor ezt kapjuk:

$$|x_n| \le q^{n-M} \cdot |x_M| = \frac{|x_M|}{q^M} \cdot q^n.$$

Tehát ha a jobb oldal első tényezőjét c-vel jelöljük, akkor alkalmazható az összehasonlító kritérium az $y_n := c \cdot q^n$ szereposztással.

II. A feltételből következik, hogy valamely M-től kezdve minden n-re $|x_{k+1}| \ge |x_k|$, így az $(|x_n|)$ sorozatnak az $\mathbb{Z} \cap (M, +\infty)$ halmazra való leszűkítése (pozitív tagú és) monoton növő, ezért nem lehet nullsorozat. $\square$

A gyökkritériumnak, illetve a hányadoskritériumnak többnyire csak azt a speciális esetét alkalmazzuk, amelyben fel van téve, hogy a megfelelő „segédsorozatnak” van határértéke:

3.23. Következmény. *I. Ha valamely (x_n) sorozatra létezik a $\lim(\sqrt[n]{|x_n|}) =: A$ határérték, akkor az $A < 1$ feltétel elegendő a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergenciájához, míg az $A > 1$ feltétel elegendő a $\sum(x_n)$ végtelen sor divergenciájához.*

II. Ha valamely (x_n) sorozat tagjai 0-tól különbözők és létezik a $\lim(|x_{n+1}|/|x_n|) =: A$ határérték, akkor az $A < 1$ feltétel elegendő a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergenciájához, míg az $A > 1$ feltétel elegendő a $\sum(x_n)$ végtelen sor divergenciájához.

Bizonyítás. Ha $A < 1$, akkor a határérték definícióját célszerű egy $(1-A)$-nál kisebb ε hibakorlátra alkalmazni; egy ehhez választott M küszöbindexre és a $q := A+\varepsilon$ számra alkalmazható a 3.21., illetve a 3.22. Tétel I. állítása.

Ha $A \in (1, +\infty)$, akkor annyiban módosul a helyzet, hogy a hibakorlátot $(A-1)$-nek célszerű választani, s az előző két tétel egyikének persze nem az I., hanem a II. állítását kell alkalmazni.

Végül az $A = +\infty$ esetben a $+\infty$-hez tartó sorozat definícióját alkalmazzuk a $K := 1$ korláttal, majd ismét az előző két tétel egyikének II. állítását. $\square$

3.24. Megjegyzés. *Mind a $\lim(\sqrt[n]{|x_n|}) = 1$, mind a $\lim(|x_{n+1}/x_n|) = 1$ feltételnek eleget tevő sorozatok között van olyan is, melyre $\sum(x_n)$ konvergens, és olyan is, melyre $\sum(x_n)$ divergens (lásd a $\sum(1/n^p)$ alakú végtelen sorokat a 3.20. Példában). Az $|x_{n+1}|/|x_n| \to 1$ esetben (is) előfordulhat, hogy az alább tétel segítségével el lehet dönteni a végtelen sor abszolút konvergenciájának kérdését:*

3.25. Tétel (Raabe-kritérium). *Tegyük fel, hogy minden pozitív egész n-re $a_n > 0$, és legyen*

$$R_n := n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

I) Ha van olyan 1-nél nagyobb p szám, és egy olyan pozitív egész N, melytől kezdve minden n egészre $R_n \geq p$, akkor a $\sum(a_n)$ végtelen sor konvergens.
II) Ha van egy olyan pozitív egész N, melytől kezdve minden n egészre $R_n \leq 1$, akkor a $\sum(a_n)$ végtelen sor divergens.

Bizonyítás. I) A végtelen sor részletösszeg-sorozata monoton növő, tehát elég a felülről korlátos voltát igazolni. Legyen először $n > N$ egész; a feltétel szerint minden $k \in \overline{N, n}$ esetén $R_k \geq p$. Szorozzuk be ennek az egyenlőtlenségnek mindkét oldalát a_k-val, majd vonjunk ki az így kapott egyenlőtlenség mindkét oldalából a_k-t, akkor ezt kapjuk:

$$(k-1)a_k - ka_{k+1} \geq (p-1)a_k.$$

Végezzük el ezeknek az egyenlőtlenségeknek az összegzését $k = N$-től $k = n$-ig, ekkor a bal oldalak összegzése során kettő kivétellel mindegyik tag kiesik (a többi tag mindegyike fellép egyszer „mínusz” és egyszer „plusz” előjellel):

$$(N-1)a_N - na_{n+1} \geq (p-1)\sum_{k=N}^{n} a_k,$$

innen

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \frac{N-1}{p-1} a_N$$

(itt a nagyobbik oldalt egy negatív előjelű tag elhagyásával tovább növeltük), ebből következik, hogy minden pozitív egész n-re

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \frac{N-1}{p-1} a_N.$$

II) Az $R_k \leq 1$ egyenlőtlenségnek a fentihez hasonló átrendezésével most azt kapjuk, hogy $(k-1)a_k - ka_{k+1} \leq 0$, összegezve $k = N+1$-től $k = n$-ig:

$$Na_{N+1} - (n-1)a_n \leq 0, \qquad \text{innen} \qquad a_n \geq \frac{Na_{N+1}}{n-1},$$

tehát a minoráns kritériumból (3.19) kapjuk, hogy a végtelen sorunk részletösszeg-sorozatának határértéke $+\infty$. □

3.26. Következmény. *A tétel jelöléseit használva, tegyük fel, hogy létezik a $\lim(R_n) =: A$. Ha $A > 1$, akkor a végtelen sor konvergens, ha $A < 1$, akkor a végtelen sor divergens.*

3.27. Példa. *Az $n \mapsto |\binom{\alpha}{n}| =: a_n$ sorozatból képezett végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha \geq 0$.*

Bizonyítás. Ha α nemnegatív egész, akkor az (a_n) sorozatnak az α-nál nagyobb indexű tagjai mind nullával egyenlők, így a részletösszeg-sorozat azért konvergens, mert egy küszöb fölött konstans. Ha α mindegyik nemnegatív egésztől különböző valós szám, akkor az (a_n) pozitív tagú sorozat, s megmutatjuk, hogy a hozzá tartozó Raabe-féle (R_n) segédsorozat konvergens: ha $n > \alpha$, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\alpha - n|}{n+1} = \frac{n-\alpha}{n+1} = 1 - \frac{1+\alpha}{n+1},$$

ezért

$$R_n = (1+\alpha)\frac{n}{n+1} \to 1+\alpha,$$

tehát az előző Következmény szerint a bizonyítást befejeztük. □

Az alábbi utolsó elégséges feltétel már csak a konvergenciára ad elégséges feltételt, és nem az abszolút konvergenciára.

3.28. Tétel (Leibniz tétele). *Ha (x_n) olyan számsorozat, amely teljesíti a következő három feltételt: (a) (x_n) nullsorozat, (b) $(|x_n|)$ monoton, (c) minden pozitív egész n-re $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, akkor*

I. $\sum(x_n)$ konvergens,

II. Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} x_k| \le |x_{n+1}|$.

Bizonyítás. Legyen minden pozitív egész n-re

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \quad a_n := s_{2n-1}\,, \quad b_n := s_{2n}.$$

A (c) feltételből következik, hogy az (x_n) sorozatnak vagy minden páratlan indexű tagja pozitív és minden páros indexű tagja negatív, vagy minden páratlan indexű tagja negatív és minden páros indexű tagja pozitív. Foglalkozzunk egyelőre az utóbbi esettel.

I. Ekkor minden n-re

$$a_{n+1} - a_n = x_{2n+1} + x_{2n} = -|x_{2n+1}| + |x_{2n}| \ge 0$$

(egy nemnegatívtagú monoton nullsorozat csakis monoton fogyó lehet),

$$b_{n+1} - b_n = x_{2n+2} + x_{2n+1} = |x_{2n+2}| - |x_{2n+1}| \le 0$$

és

$$b_n - a_n = x_{2n} = |x_{2n}| \ge 0,$$

tehát az (a_n), (b_n) sorozatok teljesítik a Cantor-féle közösrésztétel feltételeit, sőt, $\lim(x_{2n}) = 0$ miatt még a közösponttétel feltételeit is. E két sorozatnak van tehát egy közös c határértéke. Ebből következik, hogy $c = \lim(s_n)$ (ha valamely ε hibakorlát esetén az (a_n), (b_n) sorozatokhoz jó a közös M küszöbindex, akkor az (s_n) sorozathoz jó a $2M-1$ küszöbindex).

II. Becsüljük meg előbb a páratlan, majd a páros indexű részletösszegeknek a c-től való eltérését:

$$|s_{2n-1} - c| = c - a_n \le b_n - a_n = |x_{2n}|, \quad |s_{2n} - c| = b_n - c \le b_n - a_{n+1} = -x_{2n+1} = |x_{2n+1}|.$$

Ha minden n-re $x_n = (-1)^{n+1} \cdot |x_n|$, akkor a $(-x_n)$ sorozatra alkalmazhatjuk az eddig bizonyítottakat; ezek után — felhasználva azt a tényt, hogy a $\sum(-x_n)$ végtelen sor részletösszeg-sorozata a $(-s_n)$ sorozat — abból, hogy

$$\lim(s_n) = -\lim(-s_n),$$

illetve

$$|s_n - \lim(s_n)| = |-s_n - (-\lim(s_n))| \le |-x_{n+1}| = |x_{n+1}|,$$

következik az I., illetve a II. állítás az (x_n) sorozatra vonatkozóan is. □

3.5. Végtelen tizedestörtek

3.29. Definíció. *Végtelen tizedestörteknek az olyan* $(x_n 10^{-n})$ *alakú sorozatokból képezett végtelen sorokat nevezzük, amelyekre*

$$(x_n) \in T := \{(x_n) : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \ : \ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \ x_n \in \overline{0,9}\},$$

és az a kijelentés, hogy a $\sum(x_n 10^{-n})$ *végtelen tizedestört a nemnegatív* v *valós szám (egyik) végtelen tizedestört-előállítása, azt jelenti, hogy*

$$x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = v\,.$$

3.30. Tétel. *A* $\sum(x_n 10^{-n})$ *végtelen sor minden egyes* $(x_n) \in T$ *esetén konvergens.*

Bizonyítás. A vizsgált végtelen sor (abszolút) konvergenciája az összehasonlító kritériumból következik, ugyanis minden pozitív egész n-re $|x_n 10^{-n}| = x_n 10^{-n} \leq 9 \cdot 10^{-n}$, és a $\sum(9 \cdot (1/10)^n)$ végtelen mértani sor konvergens. $\square$

3.31. Tétel. *Legyen* $(x_n) \in T$ *és minden nemnegatív egész* n *esetén*

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k}\ , \quad b_n := a_n \ + \ 10^{-n};$$

ekkor a $\cap\{[a_n, b_n]\}$ *halmaz egyelemű, és az egyetlen eleme a* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n 10^{-n}$ *szám.*

Bizonyítás. Azt bizonyítjuk, hogy az (a_n), (b_n) sorozatok teljesítik a Cantor-féle közösponttétel feltételeit. Az $n \mapsto b_n - a_n = 10^{-n}$ sorozat pozitívtagú nullsorozat, az (a_n) sorozat egy nemnegatív tagú sorozat részletösszeg-sorozata, tehát monoton növő, végül minden nemnegatív egész n-re

$$b_{n+1} = a_n + x_{n+1} 10^{-(n+1)} + 10^{-(n+1)} \leq a_n + (9+1) \cdot 10^{-(n+1)} = b_n.$$

Cantor tétele szerint tehát a $\cap\{[a_n, b_n]\}$ halmaz egyelemű és az egyetlen eleme a $\lim(a_n)$ szám. $\square$

3.32. Tétel. *I. Minden nemnegatív* v *valós számnak van végtelen tizedestört-előállítása, II. minden nemnegatív* $v \in \mathbb{R}$ *számhoz egyetlen olyan* $(x_n) \in T$ *sorozat található, amelyre minden* $k \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$ *esetén*

(1)
$$a_k := \sum_{i=0}^{k} x_i 10^{-i} \leq v < \sum_{i=0}^{k} x_i 10^{-i} + 10^{-k}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel szerint elég a II. állítást bizonyítani. Az (x_n) sorozatot rekurzióval adjuk meg, s közben teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy az (1) követelmény minden n esetén egyértelműen határozza meg a sorozat n-nél nem nagyobb indexű tagjait (pontosabban: minden $n \in$ esetén egyetlen olyan $(x_0, \ldots, x_n)$ sorozat létezik, amely minden $k \in \overline{1,n}$ esetén teljesíti az (1) egyenlőtlenségeket).
Az (1) követelmény a $k = 0$ esetben pontosan akkor teljesül, ha a nemnegatív egész x_0 szám a v szám egész része.

Tegyük fel, hogy n pozitív egész, és pontosan egy olyan $(x_0, \dots, x_{n-1})$ sorozat létezik, melyre (1) teljesül minden $k \in \overline{0, n-1}$ esetén. Igazolnunk kell, hogy egyetlen olyan $x_n \in \overline{0, 9}$ szám található, melyre

$$a_{n-1} + x_n 10^{-n} \leq v < a_{n-1} + (x_n + 1)10^{-n},$$

azaz melyre

$$x_n \leq 10^n (v - a_{n-1}) < x_n + 1.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenséget pontosan egy x_n egész szám teljesíti, a $10^n(v - a_{n-1})$ egész része, és ez valóban 10-nél kisebb nemnegatív egész, vagyis $10^n(v - a_{n-1}) \in [0, 10)$, hiszen az indukciós feltételből $k = n - 1$ választással éppen ezt kapjuk. □

Most azt a középiskolából ugyan szintén ismert, de ott nem kellő precizitással tárgyalt problémát vizsgáljuk, hogy mit lehet állítani ugyanazon valós szám két különböző végtelen tizedestört-előállításának kapcsolatáról.

3.33. Tétel. *Legyenek (x_n) és (y_n) T-beli sorozatok, M nemnegatív egész, és tegyük fel, hogy minden $n \in \overline{0, M-1}$ esetén $x_n = y_n$, $x_M < y_M$, továbbá*

$$v := \sum_{n=0}^{\infty} x_n 10^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n 10^{-n}.$$

Ekkor I. $x_M + 1 = y_M$, II. minden M-nél nagyobb egész n esetén $x_n = 9$ és $y_n = 0$.

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k}, \quad b_n := a_n + 10^{-n}, \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} y_k 10^{-k}, \quad d_n := c_n + 10^{-n}.$$

I. A 3.31. Tétel szerint $v \in [a_M, b_M] \cap [c_M, d_M]$, ezért $c_M \leq v \leq b_M$. Ebből következik, hogy

$$y_M 10^{-M} = c_M - c_{M-1} = c_M - a_{M-1} \leq b_M - a_{M-1} = (x_M + 1)10^{-M},$$

innen $y_M \leq x_M + 1 \leq y_M$, vagyis valóban $x_M + 1 = y_M$.
II. Az I. állításból következik, hogy $b_M = c_M$, tehát $[a_M, b_M] \cap [c_M, d_M] = \{v\}$, újra az 5.3. Tételből következik, hogy minden M-nél nem kisebb n egészre $b_n = v = c_n$. Vagyis minden ilyen n-re egyrészt $y_{n+1} = 10^{n+1}(c_{n+1} - c_n) = 0$, másrészt

$$x_{n+1} = 10^{n+1}(a_{n+1} - a_n) = 10^{n+1}\left((v - 10^{-(n+1)}) - (v - 10^{-n})\right) = 10^{n+1} \cdot 10^{-(n+1)} \cdot (-1 + 10) = 9.$$

□

3.34. Megjegyzés. *Az előző tétel megfordítható: Ha a T halmaz (x_n) és (y_n) elemeihez található olyan M nemnegatív egész, hogy minden $n \in \overline{0, M-1}$ esetén $x_n = y_n$, $x_M + 1 = y_M$, és minden M-nél nagyobb egész n esetén $x_n = 9$ és $y_n = 0$, akkor*

$$u := \sum_{n=0}^{\infty} x_n 10^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n 10^{-n} =: v.$$

Valóban, felhasználva az 3.31. Tételt és az előző tétel jelöléseit,

$$\{u\} = \cap\{[a_n, b_n]\} = \{b_M\} = \{c_M\} = \cap\{[c_n, d_n]\} = \{v\}.$$

Most azt fogjuk megvizsgálni, hogyan lehet felismerni a (pozitív) racionális számokat a végtelen tizedestört-előállításaik alapján. Annak érdekében, hogy a választ tömören tudjuk megfogalmazni, használni fogjuk a periodikus függvény fogalmát, melynek definíciója a bevezető fejezet végén található (1.66. Definíció).

3.35. Megjegyzés. *Ha egy számsorozat periodikus, akkor minden periódusa pozitív egész szám.*

3.36. Tétel. *Legyen $(x_n) \in T$; ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x_n 10^{-n} \in \mathbb{Q}$ legyen, az, hogy létezzen olyan M pozitív egész, melyre az (x_n) sorozatnak a $\mathbb{Z} \cap [M, +\infty)$ halmazra való leszűkítése periodikus.*

Bizonyítás. I. Tegyük fel először azt, hogy valamely pozitív egész M mellett az M-nél nem kisebb egészek halmazán értelmezett $n \mapsto x_n$ függvény periodikus a pozitív egész p szerint; és bizonyítsuk be, hogy a $\sum(x_n 10^{-n})$ végtelen sor (a_n) részletösszeg-sorozatának határértéke racionális. Minthogy ez a határérték a 3.30. Tétel szerint biztosan létezik, elegendő azt bizonyítani, hogy (a_n) egy részsorozatának határértéke racionális, például az (a_{M+kp}) részsorozaté. Sőt, minthogy minden egyes részletösszeg racionális szám, például az M-edik is, elég az $(a_{M+kp} - a_M)$ sorozat határértékének racionális voltát bizonyítani. Ez utóbbi sorozatról azt fogjuk igazolni, hogy lényegében azonos egy konvergens végtelen mértani sor részletösszeg-sorozatával — pontosabban: megmutatjuk, hogy van olyan $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}}$ mértani sorozat, melynek kvóciense $1/10^p$, s melynek részletösszeg-sorozatát (s_k)-val jelölve, minden pozitív egész k esetén $a_{M+kp} - a_M = s_{k-1}$ — így határértéke a 3.6. Megjegyzés alapján könnyen kiszámítható lesz. Valóban, induljunk ki abból, hogy ha k pozitív egész, akkor az $a_{M+kp} - a_M$ szám azoknak az $x_i 10^{-i}$ alakú szorzatoknak az összegével egyenlő, amelyeknek i indexe M-nél nagyobb, de $M + kp$-nél nem nagyobb, és állítsuk elő ezt az összeget k darab p tagú összeg összegeként a következő módon:

$$a_{M+kp} - a_M = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i=M+jp+1}^{M+(j+1)p} x_i 10^{-i} \right).$$

Ha a zárójelek között álló összeget b_j-vel jelöljük, akkor — kihasználva a p szerinti periodicitást —

$$b_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{x_{M+jp+i}}{10^{M+jp+i}} = \left(\frac{1}{10^p} \right)^j \cdot \sum_{i=1}^{p} \frac{x_{M+i}}{10^{M+i}}.$$

Ebből az alakjából már könnyen leolvasható, hogy a (b_j) sorozat $1/10^p$ kvóciensű mértani sorozat, következésképpen

$$\lim_{k \to \infty} (a_{M+kp} - a_M) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{\sum_{i=1}^{p} x_{M+i} 10^{-(M+i)}}{1 - 1/10^p} \in \mathbb{Q}.$$

II. Ha a végtelen sor összege nulla, akkor (x_n) csakis az azonosan nulla sorozat lehet, hiszen ha valamely m esetén $x_m > 0$ volna, akkor a részletösszeg-sorozat m-nél nagyobb indexű tagjai közül egyik sem lehetne kisebb, mint $x_m/10^m$.
A továbbiakban tehát feltehető, hogy a végtelen sor összege az S és R *pozitív* egész számok hányadosa. Sőt, az is feltehető, hogy az S/R számnak *egyetlen* végtelen tizedestört-előállítása van, a másik esetben ugyanis az előző tételből következik, hogy az (x_n) sorozat valamely $\mathbb{Z} \cap [M, +\infty)$ alakú halmazra való leszűkítése konstans, azaz 1 szerint periodikus.

Felhasználva tehát azt, hogy az S/R számnak *egyetlen* végtelen tizedestört-előállítása van, a 3.32. Tétel alapján állíthatjuk, hogy minden $n \in$ esetén

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k} \leq \frac{S}{R} < a_n + 10^{-n}.$$

Ha itt beszorzunk az $R \cdot 10^n$ számmal:

$$(a_n 10^n)R \leq 10^n \cdot S < (a_n 10^n)R + R,$$

akkor látható, hogy az $a_n 10^n$ szám éppen a $10^n S/R$ szám egész része, és minden $n \in$ esetén az

$$r_n := S \cdot 10^n - (a_n 10^n)R \tag{2}$$

szám R-nél kisebb nemnegatív egész. Szorozzuk be (2)-t 10-zel, majd vonjuk ki az így adódó egyenletből azt, amelyet úgy kapunk, hogy (2)-ben n helyére $n+1$-et írunk:

$$10r_n - r_{n+1} = 10^{n+1}(a_{n+1} - a_n)R = x_{n+1}R. \tag{3}$$

Ebből először is az következik, hogy x_{n+1} egyenlő a $10r_n/R$ szám egész részével, tehát elég az (r_n) sorozatról bizonyítani, hogy valamely $\mathbb{Z} \cap [M, +\infty)$ alakú halmazra való leszűkítése periodikus; másrészt az, hogy r_{n+1} a $(10 \cdot r_n) : R$ maradékos osztás maradéka. Az (r_n) sorozat értékkészletének véges volta miatt (részhalmaza a $\overline{0, R-1}$ halmaznak) vannak olyan M és p pozitív egészek, melyekre $r_M = r_{M+p}$; ezek után annak (teljes indukcióval történő) bizonyítása céljából, hogy az (r_n) sorozatnak a $\mathbb{Z} \cap [M, +\infty)$ halmazra való leszűkítése p szerint periodikus, elég azt bizonyítani, hogy ha valamely pozitív egész n esetén $r_n = r_{n+p}$, akkor $r_{n+1} = r_{n+p+1}$. Ez viszont következik (3)-ból, hiszen mind az r_{n+1}, mind az r_{n+p+1} szám egyenlő a $(10 \cdot r_n) : R$ maradékos osztás maradékával. $\square$

4. HATVÁNYOK, ELEMI FÜGGVÉNYEK

A fejezet célja a hatványfogalom felépítésének részletes tárgyalása, a hatványfogalomhoz kapcsolódó elemi függvények (exponenciális függvények, logaritmusfüggvények, hatványfüggvények) értelmezése és néhány egyszerű tulajdonságának (értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, szimmetria-tulajdonságok) megállapítása.

4.1. Egész kitevőjű hatványok

A valós számok pozitív egész kitevőjű hatványainak pontos értelmezése az alábbi rekurzióval végezhető el:

4.1. Definíció (Pozitív egész kitevőjű hatványok). *Tetszőleges x valós szám első (1 kitevőjű) hatványa x; minden egyes n pozitív egész esetén $x^{n+1} := x^n \cdot x$.*

4.2. Definíció (Nempozitív egész kitevőjű hatványok). *Bármely valós szám nulladik hatványa 1; bármely nullától különböző y valós szám és n pozitív egész esetén $y^{-n} := 1/y^n$.*

4.3. Megjegyzés. *Megjegyzendő egyrészt az, hogy ez a definíció értelmes, hiszen egyszerű teljes indukcióval adódik, hogy bármely nullától különböző szám bármely pozitív egész kitevőjű hatványa nullától különböző, másrészt az, hogy bármely nullától különböző valós szám bármely egész kitevőjű hatványa is nullától különböző, s bármely pozitív szám bármely egész kitevőjű hatványa pozitív.*

Az alábbi segédtételt az utána következő tétel bizonyításához fogjuk használni.

4.4. Lemma. *Ha y nullától különböző valós szám és k egész, akkor $y^{k+1} = y^k \cdot y$.*

Bizonyítás. Ha k pozitív egész, akkor ez az első, ha $k = 0$, akkor a második definícióból következik. Legyen végül k a pozitív egész p szám ellentettje. A már bizonyítottak szerint $y^p = y^{p-1} \cdot y$, ezért (kétszer felhasználva a nempozitív egész kitevőjű hatványok definícióját)

$$y^{k+1} = \frac{1}{y^{p-1}} = \frac{1}{y^{p-1} \cdot y} \cdot y = \frac{1}{y^p} \cdot y = y^k \cdot y.$$

□

4.5. Tétel (egész kitevőjű azonos alapú hatványok szorzata). *Bármely nullától különböző y valós szám és bármely $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ esetén $y^{m+n} = y^m \cdot y^n$.*

Bizonyítás. Először az $n > 0$ speciális esetre bizonyítjuk az állítást, éspedig n szerinti teljes indukcióval. Az $n = 1$ esetet az imént bizonyított segédtételben elintéztük ($k := m$). Az indukciós lépés:

$$y^{m+(n+1)} = y^{(m+n)+1} = y^{m+n} \cdot y = (y^m \cdot y^n) \cdot y = y^m \cdot (y^n \cdot y) = y^m \cdot y^{n+1};$$

itt az első és a negyedik egyenlőség az összeadás, illetve a szorzás asszociativitása miatt, a második és az ötödik a segédtétel miatt, a harmadik pedig az indukciós feltétel miatt áll fenn.

Ha n a pozitív egész p szám ellentettje, akkor a definíción és az asszociativitáson kívül fel tudjuk használni a tételnek a már bizonyított részét is, éspedig az (m, n) pár helyett az $(m-p, p)$ számpárra:

$$y^m \cdot y^n = (y^{m-p} \cdot y^p) \cdot y^n = y^{m-p} \cdot (y^p \cdot y^n) = y^{m+n} \cdot 1 = y^{m+n}.$$

Végül az $n = 0$ esetben a bizonyítandó egyenlőség a nulladik hatvány definíciójának nyilvánvaló következménye. □

Most a hatványozás egy másik közismert azonosságával, a szorzat hatványaira vonatkozó azonossággal foglalkozunk.

4.6. Tétel. *Ha u és v nullától különböző valós számok, akkor minden egyes k egész számra $(u \cdot v)^k = u^k \cdot v^k$.*

Bizonyítás. A kitevő pozitív egész értékeire teljes indukciót alkalmazhatunk: a $k = 1$ eset nyilvánvaló; az indukciós lépés:

$$(u \cdot v)^{k+1} = (u \cdot v)^k (u \cdot v) = (u^k \cdot v^k)(u \cdot v) = (u^k \cdot u) \cdot (v^k \cdot v) = u^{k+1} \cdot v^{k+1}.$$

Ha k negatív egész, akkor alkalmazhatjuk a már bizonyítottakat a k helyett a pozitív egész $-k$ kitevőre, ebből éppen azt kapjuk, hogy a bizonyítandó egyenlőség bal oldalának reciproka egyenlő a jobb oldal reciprokával, míg a $k = 0$ esetben az $1 = 1 \cdot 1$ egyenlőségről van szó. □

4.7. Tétel. *Minden nullától különböző y valós szám és $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ esetén $(y^m)^n = y^{mn}$.*

Bizonyítás. n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n = 1$, akkor mindkét oldalon y^m áll. Ha egy pozitív egész n-re igaz az állítás, akkor

$$(y^m)^{n+1} \overset{4.4}{=} (y^m)^n \cdot y^m = y^{mn} \cdot y^m \overset{4.5}{=} y^{mn+m} = y^{m(n+1)}.$$

□

4.2. Gyökvonás

Az alábbi állítások az 1.39. Tétel egyszerű következményei:

4.8. Állítás. *Bármely pozitív egész k esetén a nemnegatív számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^k$ függvény kölcsönösen egyértelműen – éspedig szigorúan monoton növő módon – képezi az összes nemnegatív számok halmazára.*

4.9. Állítás. *Bármely páratlan pozitív egész k szám esetén az összes valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^k$ függvény szigorúan monoton növő, és értékkészlete egyenlő az összes valós számok halmazával.*

4.10. Definíció. *Legyen k pozitív egész; egy q nemnegatív szám k-adik gyökén azt a nemnegatív számot értjük, amelynek k-adik hatványa q-val egyenlő (jelölés: $\sqrt[k]{q}$), egy y valós szám $(2k-1)$-edik gyökén azt a valós számot értjük, amelynek $(2k-1)$-edik hatványa y-nal egyenlő.*

4.11. Tétel. *Ha a és b pozitív számok, k pedig pozitív egész, akkor $\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$.*

Bizonyítás. Az iménti definícióból és a 4.6. Tételből következik, hogy a bal és a jobb oldalon egyaránt olyan nemnegatív szám áll, amelynek k-adik hatványa $a \cdot b$, így a 4.8. Állítás szerint ezek a számok nem különbözhetnek egymástól. □

A most bizonyítandó tétel célja annak igazolása, hogy a racionális kitevőjű hatványok definíciója korrekt: a hatvány értéke valóban csak az alaptól és a kitevőtől függ, s nem függ attól, hogyan állítjuk elő a kitevőt egy egész és egy pozitív egész hányadosaként.

4.12. Tétel. *Ha c pozitív szám, Tegyük fel, hogy k és m egész, l és n pozitív egész, s ezek között fennáll a $k/l = m/n$ összefüggés. Ekkor az alábbi feltételek akármelyike elegendő ahhoz, hogy $\sqrt[l]{c^k} = \sqrt[n]{c^m}$ legyen: I) $c > 0$, II) l és n páratlanok, továbbá c nullától különböző valós szám.*

Bizonyítás. I) A 4.8. Állítás szerint elég azt igazolni, hogy az egyenlet két oldalán olyan nemnegatív számok állnak, amelyeknek az $l \cdot n$-edik hatványai egyenlők egymással. A bal oldal $l \cdot n$-edik hatványa az iménti definíció és a 4.7. Tétel szerint

$$\left((\sqrt[l]{c^k})^l\right)^n = (c^k)^n = c^{kn},$$

míg a jobb oldalé

$$\left((\sqrt[n]{c^m})^n\right)^l = (c^m)^l = c^{ml},$$

és itt a k, l, m, n számokkal kapcsolatos feltétel szerint a két kitevő (kn és ml) egyenlő egymással.
II) Az I) állítás bizonyítását majdnem szóról szóra másolhatjuk, csak az első mondata változik egy keveset: 4.8 helyett a 4.9. Állításra kell hivatkozni, továbbá a „nemnegatív” szó helyett a „valós” szót kell mondani. □

4.3. Pozitív szám racionális kitevőjű hatványai

4.13. Definíció. *Minden egyes pozitív c szám és racionális r szám esetén legyen $c^r := \sqrt[q]{c^p}$, ahol p egész szám, q pozitív egész szám és $p/q = r$.*

A következő állítás könnyen következik a definíciókból:

4.14. Állítás. *Legyen c pozitív valós, r pedig racionális szám; ekkor*

$$c^r \begin{cases} \in (0,1), & \text{ha } c \in (0,1) \text{ és } r > 0, \text{ vagy } c > 1 \text{ és } r < 0, \\ = 1, & \text{ha } c = 1, \text{ vagy } r = 0, \\ \in (1,+\infty), & \text{ha } c > 1 \text{ és } r > 0, \text{ vagy } c \in (0,1) \text{ és } r < 0. \end{cases}$$

4.15. Tétel. *Bármely pozitív c és racionális r, s számok esetén $c^{r+s} = c^r \cdot c^s$.*

Bizonyítás. Válasszuk a q pozitív egész és p, t egész számokat úgy, hogy $r = p/q$ és $s = t/q$ legyen. Ekkor

$$c^{r+s} = c^{\frac{p+t}{q}} \overset{4.13}{=} \sqrt[q]{c^{p+t}} \overset{4.5}{=} \sqrt[q]{c^p \cdot c^t} \overset{4.11}{=} \sqrt[q]{c^p} \cdot \sqrt[q]{c^t} \overset{4.13}{=} c^r \cdot c^t.$$

□

4.16. Tétel. *Ha egy $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ függvény helyettesítési értéke az 1 helyen pozitív, és bármely s, t racionális számok esetén $g(s+t) = g(s) \cdot g(t)$, akkor minden racionális r esetén $g(r) = (g(1))^r$.*

Bizonyítás. k szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden pozitív egész k és minden $(r_1, ..., r_k) \in \mathbb{Q}^k$ esetén

$$g\left(\sum_{i=1}^{k} r_i\right) = \prod_{i=1}^{k} g(r_i).$$

A $k = 1$ eset evidens; az indukciós feltételt azáltal tudjuk kihasználni, hogy a $k+1$-tagú összeget olyan kéttagú összegként fogjuk fel, melynek egyik tagja k-tagú összeg:

$$g\left(\sum_{i=1}^{k+1} r_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{k} r_i + r_{k+1}\right) = g\left(\sum_{i=1}^{k} r_i\right) \cdot g(r_{k+1}) = \left[\prod_{i=1}^{k} g(r_i)\right] \cdot g(r_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} g(r_i).$$

Ebből következik először az, hogy — bevezetve a $c := g(1)$ jelölést — minden pozitív egész k számra $g(1/k) = \sqrt[k]{c}$, hiszen

$$c = g\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\right) = \prod_{i=1}^{k} g\left(\frac{1}{k}\right) = \left[g\left(\frac{1}{k}\right)\right]^k,$$

másodszor az, hogy ha r pozitív racionális szám, akkor $g(r) = c^r$: előállítva az r számot a pozitív egész m és n számok hányadosaként,

$$g(r) = g\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n}\right) = \left[g\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = (\sqrt[n]{c})^m = \sqrt[n]{c^m},$$

itt az utolsó egyenlőség bizonyítása céljából elég azt igazolni (a 4.11. Tétel felhasználásával, m szerinti teljes indukcióval), hogy egy nemnegatív számokból képezett m-tényezős szorzat n-edik gyöke egyenlő az egyes tényezők n-edik gyökeinek szorzatával.

$c = g(0+1) = g(0) \cdot c$ miatt $g(0) = 1 = c^0$, végül ha r negatív racionális, azaz valamely pozitív egész m és n mellett $r = -m/n$, akkor

$$g(r) = \frac{g(0)}{g(\frac{m}{n})} = \frac{1}{\sqrt[n]{c^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{c^m}} = \sqrt[n]{c^{-m}} = c^r,$$

itt a harmadik egyenlőség bizonyítását a 4.11. Tételből, valamint abból a tényből kaphatjuk, hogy $\sqrt[n]{1} = 1$. □

4.17. Következmény. *Bármely pozitív c számhoz egyetlen olyan $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ függvény található, mely az 1 helyen a c értéket veszi fel, s melyre minden $(p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ esetén $g(p+q) = g(p) \cdot g(q)$; ez az $r \mapsto c^r$ függvény.*

4.18. Tétel. *Minden $(a,b,r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Q}$ hármasra $(ab)^r = a^r \cdot b^r$; minden $(a,s,r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ hármasra $(a^s)^r = a^{sr}$.*

Bizonyítás. Mindkét állítás következik az előző tételből. Értelmezzük ugyanis először a g függvényt a racionális számok halmazán — rögzített a és b mellett — az $r \mapsto a^r \cdot b^r$, a második esetben — rögzített a és s mellett — az $r \mapsto a^{sr}$ hozzárendeléssel. Az első esetben $g(1) = a \cdot b > 0$, s ha p, q racionális számok, akkor $g(p+q) = a^{p+q} \cdot b^{p+q} = a^p \cdot a^q \cdot b^p \cdot b^q = a^p \cdot b^p \cdot a^q \cdot b^q = g(p) \cdot g(q)$; a második esetben $g(1) = a^s > 0$, és ha p, q racionális számok, akkor $g(p+q) = a^{s(p+q)} = a^{sp+sq} = a^{sp} \cdot a^{sq} = g(p) \cdot g(q)$. □

4.19. Következmény. *Bármely $(c,d,r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Q}$ hármasra $(c/d)^r = c^r/d^r$. Valóban, alkalmazhatjuk az azonos kitevőjű hatványok szorzatára vonatkozó – imént bizonyított – azonosságot az $a := c/d$, $b := d$ szereposztással.*

4.20. Tétel. *A racionális számok halmazán értelmezett $r \mapsto c^r$ függvény szigorúan monoton fogyó, konstans, illetve szigorúan monoton növő, attól függően, hogy $c \in (0,1)$, $c = 1$, illetve $c > 1$.*

Bizonyítás. Legyen p tetszőleges racionális szám, q pedig tetszőleges p-nél nagyobb racionális szám. Felhasználva az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosságot, azt a tényt, hogy bármely pozitív szám racionális hatványai pozitív számok, végül a 4.14. Állítást, kapjuk, hogy

$$c^q = c^{p+(q-p)} = c^p \cdot c^{q-p}$$

kisebb mint c^p, egyenlő c^p-vel, illetve nagyobb mint c^p, attól függően, hogy $c \in (0,1)$, $c = 1$, illetve $c > 1$. □

4.21. Tétel. *Ha r racionális szám, akkor a pozitív számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^r$ függvény (az r kitevőjű hatványfüggvény) szigorúan monoton növő, konstans, illetve szigorúan monoton fogyó attól függően, hogy $r > 0$, $r = 0$, illetve $r < 0$.*

Bizonyítás. Legyen $0 < x < y$, azt kell vizsgálni, hogy a x^r, y^r számok közül melyik a nagyobb, vagy ami ezzel egyenértékű: azt, hogy a $(x/y)^r = x^r/y^r$, 1 számok közül melyik a nagyobb. Tudjuk, hogy $0 < x/y < 1$, így erre a kérdésre a 4.14. Állításból kiolvasható az r előjelétől függő válasz: az $(x/y)^r$ szám kisebb mint 1, egyenlő 1-gyel, illetve nagyobb mint 1 attól függően, hogy az r szám pozitív, egyenlő nullával, illetve negatív. $\square$

4.4. További racionális kitevőjű hatványok

Az alábbi definícióban kitüntetett szerephez jutnak azok a racionális számok, amelyek előállíthatók egy egész szám és egy páratlan pozitív egész hányadosaként, ezért ezek összességére bevezetünk egy jelölést.

4.22. Jelölés. $Q_0 := \{r \in \mathbb{Q} : \exists m \in \mathbb{Z}\ \exists k \in \mathbb{Z}^+ \quad r = m/(2k-1)\}$.

Ehhez a halmazhoz tartoznak például az egész számok, 1/3, 7/9, 30/42, stb.

Az egyértelmű prímfelbontás tételéből következik, hogy az alábbi halmazok diszjunktak, és nyilvánvaló, hogy uniójuk egyenlő az egész Q_0 halmazzal:

4.23. Jelölés.

$$Q_1 := \{r \in \mathbb{Q} : \exists m, n \in \mathbb{Z} \quad r = (2m-1)/(2n-1)\}, \quad Q_2 := \{r \in \mathbb{Q} : \exists m, n \in \mathbb{Z} \quad r = (2m)/(2n-1)\}.$$

Mint azt mindjárt látni fogjuk, a negatív alapú, Q_0-beli kitevőjű hatvány definíciója gyakorlatilag ugyanaz, mint a pozitív alapú racionális kitevőjű hatványé, csak most a definíció korrekt volta a 4.12. Tételnek nem az I), hanem a II) állításából következik.

4.24. Definíció. *Ha c negatív szám, és a racionális r szám előállítható az egész m és a pozitív egész $2n-1$ szám hányadosaként, akkor $c^r := \sqrt[2n-1]{c^m}$, míg a 0 szám tetszőleges pozitív racionális kitevőjű hatványa definíció szerint nulla.*

4.25. Definíció. *Ha $r \in Q_0$, akkor az r kitevőjű hatványfüggvény az az $x \mapsto x^r$ hozzárendelés, melynek értelmezési tartománya $r < 0$ esetén a nullától különböző valós számok halmaza, $r \geq 0$ esetén pedig az összes valós számok halmaza, vagyis mindkét esetben azoknak az x valós számoknak a halmaza, amelyekre értelmeztük az x^r hatványt.*

4.26. Megjegyzés. *A definíciók közvetlen következménye, hogy a Q_1-beli kitevőjű hatványfüggvények páratlanok, a Q_2-beliek pedig páros függvények.*

4.5. Az irracionális kitevőjű hatvány értelmezése

Ha x irracionális szám és c pozitív szám, akkor a c^x hatványt olyan (c^{r_n}) alakú sorozat határértékeként szeretnénk értelmezni, melyre (r_n) tetszőleges x-hez tartó *racionális tagú* sorozat. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, három dolgot kell bizonyítanunk. Először azt, hogy konvergens racionális tagú (r_n) sorozat esetén a (c^{r_n}) sorozat is konvergens, másodszor azt, hogy a (c^{r_n}) sorozat határértéke csak az (r_n) sorozat határértékétől függ, végül azt, hogy minden irracionális számhoz található hozzá konvergáló racionális tagú sorozat.

4.27. Jelölés. *Minden 1-től különböző pozitív c szám esetén jelöljük $\exp_c^{\mathbb{Q}}$-val a racionális számok halmazán értelmezett c alapú exponenciális függvényt, vagyis a $\mathbb{Q} \ni r \mapsto c^r$ függvényt.*

4.28. Tétel. *Bármely konvergens racionális tagú (r_n) sorozat és pozitív c esetén a (c^{r_n}) sorozat is konvergens.*

Bizonyítás. $c = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló, így a továbbiakban feltehetjük, hogy $c \neq 1$. (r_n) konvergens, ezért korlátos, jelöljön A, illetve B egy-egy racionális alsó, illetve felső korlátot (az Arkhimédész-i axiómából következik, hogy létezik akár *egész* alsó és felső korlát is). Az $\exp_c^{\mathbb{Q}}$ függvény monotonitásából következik, hogy a (c^{r_n}) sorozat is korlátos: ha $c > 1$, akkor $K := c^B$, ha $c \in (0, 1)$, akkor $K := c^A$ felső korlátja ennek a sorozatnak. A konvergenciát a Cauchy-féle konvergenciakritérium segítségével igazoljuk: legyen ε tetszőleges pozitív szám; tekintettel a

$$|c^{r_n} - c^{r_m}| = c^{r_m}|c^{r_n - r_m} - 1|$$

azonosságra, elég olyan küszöbindex létezését igazolni, amely fölött minden m, n egészre a jobb oldal második tényezője kisebb, mint ε/K, vagy ami ez utóbbival egyenértékű:

$$1 - \frac{\varepsilon}{K} < c^{r_n - r_m} < 1 + \frac{\varepsilon}{K}.$$

Az $(\sqrt[n]{c})$ sorozat 1-hez tartásából, és a reciprokának 1-hez tartásából következik egy olyan M pozitív egész létezése, amelyre a $c^{1/M}$, $c^{-1/M}$ számok benne vannak az 1 szám ε/K sugarú környezetében. A feltétel szerint az (r_n) sorozat konvergens, tehát teljesíti a Cauchy-féle konvergenciafeltételt, ezért van olyan N pozitív egész, amely fölött minden m, n egészre $-1/M < r_n - r_m < 1/M$. Az ilyen m, n egészekre tehát az $\exp_c^{\mathbb{Q}}$ függvény szigorú monotonitásából következik, hogy e függvénynek a $-1/M$, $1/M$ helyeken felvett értékei közrefogják az $r_n - r_m$ helyen felvett értékét, így ez utóbbi is benne van az 1 szám ε/K sugarú környezetében. □

4.29. Megjegyzés. *A továbbiakban néhány tétel azonosítása során használni fogjuk a „szekvenciálisan folytonos” kifejezést. Ennek pontos értelmezése a második féléves anyag elején, vagyis a következő fejezet elején található.*

4.30. Tétel ($\exp_c^{\mathbb{Q}}$ szekvenciálisan folytonos). *Ha a racionális tagú (r_n) sorozat konvergál a* racionális *q számhoz és $c > 0$, akkor* $\lim_{n\to\infty} c^{r_n} = c^q$.

Bizonyítás. Adott ε pozitív számhoz, tekintettel a

$$|c^{r_n} - c^q| = c^q|c^{r_n - q} - 1|$$

átalakításra, olyan küszöbindex létezését kell bizonyítanunk, amely fölötti n egészekre $|c^{r_n - q} - 1| < \varepsilon/c^q$, azaz

$$1 - \frac{\varepsilon}{c^q} < c^{r_n - q} < 1 + \frac{\varepsilon}{c^q}.$$

Az előző tétel bizonyításában követett gondolatmenetet másolva, rögzítsünk egy olyan pozitív egész M-et, amelyre a $c^{1/M}$, $c^{-1/M}$ számok benne vannak az 1 szám ε/c^q sugarú környezetében, válasszuk az N küszöbindexet $\lim(r_n) = q$ definíciója alapján úgy, hogy $n > N$ esetén $-1/M < r_n - q < 1/M$ legyen, az ilyen n-ekre tehát az $\exp_c^{\mathbb{Q}}$ függvénynek a $-1/M$, $1/M$ helyeken felvett értékei közrefogják az $r_n - q$ helyen felvett értékét, így ez utóbbi is benne van az 1 szám ε/c^q sugarú környezetében. □

4.31. Tétel. *Ha (p_n) és (q_n) ugyanahhoz a számhoz konvergáló racionális tagú sorozatok és $c > 0$, akkor* $\lim(c^{p_n}) = \lim(c^{q_n})$.

Bizonyítás. Minthogy minden n pozitív egészre $c^{p_n} = c^{p_n - q_n} c^{q_n}$, és az előző két tétel szerint a jobb oldalon mindkét tényező konvergens: lévén $(p_n - q_n)$ nullsorozat, az első tényező 1-hez tart, tehát

$$\lim_{n\to\infty} c^{p_n} = \lim_{n\to\infty} c^{p_n - q_n} \lim_{n\to\infty} c^q_n = \lim_{n\to\infty} c^q_n.$$

□

4.32. Tétel. *Minden valós x szám esetén léteznek x-hez konvergáló racionális tagú sorozatok, ezek között létezik szigorúan monoton fogyó is, és szigorúan monoton növő is.*

Bizonyítás. Rekurzióval értelmezünk egy szigorúan monoton növő (y_n), és egy szigorúan monoton fogyó (z_n) x-hez tartó racionális tagú sorozatot, közben többször felhasználjuk azt a bevező fejezetben bizonyított tényt, hogy minden nyílt intervallumban van racionális szám. Legyen y_1 az $(x-1, x) \cap \mathbb{Q}$ halmaz tetszőleges eleme, z_1 pedig az $(x, x+1) \cap \mathbb{Q}$ halmazé. Ha e sorozatok n-nél nem nagyobb indexű tagjai már értelmezettek, és minden $i \in \overline{1, n}$ esetén

$$x - \frac{1}{i} < y_i, \qquad z_i < x + \frac{1}{i} \qquad \text{és} \qquad y_1 < y_2 < \ldots < y_n < x < z_n < z_{n-1} < \ldots < z_1,$$

akkor legyen y_{n+1} tetszőleges olyan x-nél kisebb racionális szám, amely nagyobb, mint az y_n és $x - 1/(n+1)$ számok nagyobbika, z_{n+1} pedig tetszőleges olyan x-nél nagyobb racionális szám, amely kisebb, mint a z_n és $x + 1/(n+1)$ számok kisebbike. □

Az alábbi tétel speciális esetként ($H := \mathbb{Q}$) tartalmazza az előzőt.

4.33. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{R}$, $x \in [-\infty, +\infty)$, és minden x-nél nagyobb valós y esetén az (x, y) intervallumban van H-beli elem, akkor van olyan x-hez tartó szigorúan monoton fogyó sorozat, melynek minden tagja a H-ban van. Ha $H \subset \mathbb{R}$, $x \in (-\infty, +\infty]$, és minden x-nél kisebb valós z esetén a (z, x) intervallumban van H-beli elem, akkor van olyan x-hez tartó szigorúan monoton növő sorozat, melynek minden tagja a H-ban van.*

Bizonyítás vázlata. Az előző bizonyítás másolható azzal az eltéréssel, hogy egyrészt racionális szám helyett H-beli számot kell mondani, másrészt $x = -\infty$ esetén az $(x + 1/n)$ sorozat szerepét a $(-n)$ sorozat, $x = +\infty$ esetén az $(x - 1/n)$ sorozat szerepét az (n) sorozat veheti át. □

Ezzel tehát a szakasz elején óhajként megfogalmazott kijelentés korrekt definícióvá alakult:

4.34. Definíció. *Ha x irracionális szám és c pozitív szám, akkor a c^x hatványt azoknak a (c^{r_n}) alakú sorozatoknak közös határértékeként értelmezzük, melyekre (r_n) tetszőleges x-hez tartó* racionális tagú *sorozat.* Pozitív *irracionális x esetén legyen továbbá $0^x := 0$.*

4.6. Az exponenciális függvények

4.35. Definíció. *Tetszőleges 1-től különböző pozitív c esetén a c alapú exponenciális függvény az az* $\exp_c$ *jelsorozattal jelölt, az összes valós számok halmazát önmagába képező függvény, amely minden egyes x valós számhoz a c^x hatványt rendeli.*

4.36. Állítás ($\boldsymbol{R}(\exp_c) \subset \mathbb{R}^+$). *Bármely pozitív c és bármely valós x esetén $c^x > 0$.*

Bizonyítás. Az állítás abból következik, hogy c^x pozitív tagú szigorúan monoton növő sorozat határértékeként is előáll: ha ugyanis $c > 1$, akkor az x-hez tartó racionális tagú sorozatot választhatjuk szigorúan monoton növőnek, s ha $c \in (0,1)$, akkor fogyónak. $\square$

4.37. Megjegyzés. *Tekintettel e szakasz második tételére és az iménti definícióra, mondhatjuk, hogy bármely valós x, és bármely x-hez konvergáló racionális tagú (r_n) sorozat esetén* $\lim_{n\to\infty} c^{r_n} = c^x$.

4.38. Tétel ($\exp_c$ szigorúan monoton). *Ha $c > 1$, akkor az $\exp_c$ függvény szigorúan monoton növő, ha $c \in (0,1)$, akkor az $\exp_c$ függvény szigorúan monoton fogyó.*

Bizonyítás. Csak a $c > 1$ esetet részletezzük, a másik eset hasonlóan intézhető el. Legyenek x, y valós számok, $x < y$; vegyünk először az (x, y) intervallumban egy p, majd a (p, y) intervallumban egy q racionális számot, végül két racionális tagú sorozatot: egy x-hez tartó szigorúan monoton fogyó (p_n), és egy y-hoz tartó szigorúan növő (q_n) sorozatot. A határérték definícióját az $\varepsilon := p - x$, illetve $\varepsilon := y - q$ hibakorláttal alkalmazva kapjuk egy olyan (mindkét küszöbindexnél nagyobb) m pozitív egész létezését, amelyre

$$x < p_n < p < q < q_n < y, \qquad \text{következésképp} \qquad c^x \le c^{p_m} \le c^p < c^q \le c^{q_m} \le c^y,$$

itt a két szélső egyenlőtlenség bizonyításához azt lehet használni, hogy a (c^{p_n}) sorozat monoton fogyó s határértéke c^x, a (c^{q_n}) sorozat monoton növő és határértéke c^y. $\square$

4.39. Tétel (azonos alapú, ill. azonos kitevőjű hatványok szorzata). *Ha a, b és c pozitív számok, x és y valós számok, akkor I) $c^{x+y} = c^x c^y$ és II) $(ab)^x = a^x b^x$.*

Bizonyítás. Legyen (p_n) racionális tagú x-hez tartó, (q_n) racionális tagú, y-hoz tartó sorozat. Ekkor persze $(p_n + q_n)$ racionális tagú, $x + y$-hoz tartó sorozat, így a bizonyítandó azonosságokban szereplő hatványok mindegyikét elő tudjuk állítani racionális kitevőjű hatványok sorozatának határértékeként (lásd az előző tétel előtt álló Megjegyzést), így az állítások könnyen következnek a szorzat határétékére vonatkozó tételből, valamint abból a tényből, hogy ezek az azonosságok racionális kitevőkre igazak:

$$\lim_{n\to\infty} c^{p_n+q_n} = \lim_{n\to\infty} (c^{p_n} c^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} c^{p_n} \lim_{n\to\infty} c^{q_n} = c^x c^y,$$

$$\lim_{n\to\infty} (ab)^{p_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{p_n} b^{p_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{p_n} \lim_{n\to\infty} b^{p_n} = a^x b^x.$$

$\square$

4.40. Tétel ($\exp_c$ szekvenciálisan folytonos). *Bármely pozitív c, valós v, és v-hez konvergáló valós (x_n) sorozat esetén a (c^{x_n}) sorozat tart a c^v számhoz.*

Bizonyítás. A 4.30. Tétel bizonyítása lényegében szóról szóra átmásolható (q helyett v-t, r_n helyett x_n-et és $\exp_c^{\mathbb{Q}}$ helyett $\exp_c$-t írva), ugyanis abban a bizonyításban az $\exp_c^{\mathbb{Q}}$ függvénynek csupán két olyan tulajdonságát használtuk, amelyeket azóta az $\exp_c$ függvénnyel kapcsolatban is igazoltunk: az egyik a monotonitás volt, a másik az azonos alapú hatványok szorzatáról szóló azonosság. $\square$

4.41. Tétel (hatvány hatványa). *Bármely pozitív c és valós x, y számok esetén $(c^x)^y = c^{xy}$.*

Bizonyítás. Először valós y helyett racionális r kitevőre bizonyítjuk az állítást. Ha (r_n) x-hez tartó racionális tagú sorozat, akkor

$$(c^x)^r = \left(\lim_{n\to\infty} c^{r_n}\right)^r = \lim_{n\to\infty} ((c^{r_n})^r) = \lim_{n\to\infty} c^{r_n r} = c^{xr}.$$

Itt az első lépésben a c^x hatvány definícióját, a másodikban azt a tényt, hogy ha a pozitív tagú (x_n) sorozat tart az u pozitív számhoz (itt $u := c^x$ és $x_n := c^{r_n}$), akkor minden racionális r esetén (x_n^r) tart u^r-hez (lásd a gyakorlatok anyagát képező feladatgyűjtemény 170. feladatát), a harmadikban a 4.18. Tételt, míg az utolsóban az előző tételt használtuk. $\square$

4.42. Tétel ($\boldsymbol{R}(\mathbf{exp}_c) = \mathbb{R}^+$). *Mindegyik exponenciális függvény értékkészlete egyenlő az összes pozitív számok halmazával.*

Bizonyítás. A 4.36. Állítás szerint elég annyit igazolni, hogy minden pozitív szám benne van mindegyik exponenciális függvény értékkészletében. Jelöljük az exponenciális függvényünk alapját c-vel, legyen v tetszőleges pozitív szám, és tegyük fel először, hogy $c > 1$. A Cantor-féle közösponttétel segítségével, felezéses eljárással állítjuk elő azt az u valós számot, ahol az $\exp_c$ függvény értéke éppen y-nal egyenlő. Rekurzív módon értelmezzük az (a_n, b_n) párok sorozatát, éspedig olymódon, hogy minden n-re $c^{a_n} < v \le c^{b_n}$ legyen. Legyen a_1 a legnagyobb olyan negatív egész k, melyre $c^k < v$ (azért létezik ilyen k, mert a (c^{-n}) sorozat nullsorozat), b_1 pedig a legkisebb olyan pozitív egész m, melyre $c^m > v$ (azért létezik ilyen m, mert $\lim(c^n) = +\infty$. Ha az (a_n, b_n) párt már értelmeztük, akkor f_n-nel jelölve az $(a_n + b_n)/2$ felezőpontot, $c^{f_n} < v$ esetén legyen $a_{n+1} := f_n$ és $b_{n+1} := b_n$, a másik esetben $a_{n+1} := a_n$ és $b_{n+1} := f_n$. Az $[a_n, b_n]$ intervallumok egyetlen közös pontját u-val jelölve, u az (a_n) (b_n) sorozatok közös határértéke, ezért a 4.40. Tétel szerint a c^u szám a (c^{a_n}) (c^{b_n}) sorozatok közös határértéke. Ebből, és a minden n-re érvényes $c^{a_n} < v \le c^{b_n}$ egyenlőtlenség-párból adódik, hogy

$$c^u = \lim_{n\to\infty} c^{a_n} \le v \le \lim_{n\to\infty} c^{b_n} = c^u,$$

vagyis $c^u = v$.
A $c \in (0,1)$ hasonlóan tárgyalható (csak meg kell fordítani néhány egyenlőtlenséget), vagy akár a $c > 1$ eset következményének is tekinthető, hiszen a $c^x = v$ egyenlet egyetlen gyöke éppen a (-1)-szerese az $(1/c)^x = v$ egyenlet egyetlen gyökének. $\square$

4.7. Logaritmusfüggvények, irracionális kitevőjű hatványfüggvények

4.43. Definíció. *Tetszőleges $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ esetén a c alapú exponenciális függvény inverzét c alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük és a $\log_c$ szimbólummal jelöljük. $c = e$ esetén használatosak a* $\log := \ln := \log_e$ *és* $\exp := \exp_e$ *jelölések; ilyenkor élőszóban az „e alapú” jelzőt el is lehet hagyni az „exponenciális függvény”, illetve „logaritmusfüggvény” szavak elől.*

Az előző tétel azzal egyenértékű, hogy a logaritmusfüggvények értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza és ugyancsak az inverz függvény definíciójából következik, hogy mindegyik logaritmusfüggvénny értékkészlete egyenlő az összes valós számok halmazával.

Vegyük sorra a logaritmusfüggvényeknek – a középiskolából már ismert – néhány fontos tulajdonságát!

4.44. Tétel. *I. A c alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, illetve fogyó, attól függően, hogy $c > 1$, vagy $c \in (0,1)$,*
II. bármely $(x, y, c) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ hármasra $\log_c(x \cdot y) = \log_c x + \log_c y$,
III. bármely $(\alpha, x, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$ hármasra $\log_c x^\alpha = \alpha \cdot \log_c x$,
IV. bármely $(a, b, x) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}^+$ hármasra $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.

Bizonyítás. I. A $\log_c$ függvény definíciójából kapjuk, hogy ugyanolyan értelemben szigorúan monoton, mint az $\exp_c$ függvény: $c > 1$ esetén $\log_c x \geq \log_c y$-ból következik, hogy $x = c^{\log_c x} \geq c^{\log_c y} = y$, ha pedig $c \in (0,1)$, akkor $\log_c x \leq \log_c y$-ből következik $x = c^{\log_c x} \leq c^{\log_c y} = y$.
II. A $\log_c$ függvény, illetve az inverz függvény definíciója szerint $\log_c(x \cdot y)$ az *egyetlen* olyan t valós szám, amely teljesíti a $c^t = x \cdot y$ feltételt, ezért elég azt igazolni, hogy $\log_c x + \log_c y$ is ilyen szám:

$$c^{\log_c x + \log_c y} = c^{\log_c x} \cdot c^{\log_c y} = x \cdot y.$$

III. A $\log_c$ függvény, illetve az inverz függvény definíciója szerint $\log_c x^\alpha$ az *egyetlen* olyan t valós szám, amely teljesíti a $c^t = x^\alpha$ feltételt, ezért elég azt igazolni, hogy $\alpha \cdot \log_c x$ is ilyen szám:

$$c^{\alpha \cdot \log_c x} = \left(c^{\log_c x}\right)^\alpha = x^\alpha.$$

IV. A $\log_a$ függvény, illetve az inverz függvény definíciója szerint $\log_a x$ az *egyetlen* olyan t valós szám, amely teljesíti az $a^t = x$ feltételt, ezért elég azt igazolni, hogy $\log_a b \cdot \log_b x$ is ilyen szám:

$$a^{\log_a b \cdot \log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = b^{\log_b x} = x,$$

az első egyenlőség a hatvány hatványára vonatkozó azonosság (4.41), a második és a harmadik a logaritmusfüggvények definíciója alapján állítható. $\square$

Most röviden megismerkedünk az irracionális kitevőjű hatványfüggvényekkel is; ezeket az α kitevő pozitív irracionális értékei esetén a nemnegatív számok halmazán, $\alpha \in (-\infty, 0) \setminus \mathbb{Q}$ esetén a pozitív számok halmazán értelmezzük az $x \mapsto x^\alpha$ hozzárendeléssel. Az α kitevőjű hatványfüggvény jelölésére az id^α szimbólumot használjuk.

4.45. Tétel. *Legyen α irracionális szám. Ekkor*
I. $R(\mathrm{id}^\alpha) = D(\mathrm{id}^\alpha)$,
II. id^α *szigorúan monoton növő, illetve fogyó — attól függően, hogy α pozitív, vagy negatív.*

Bizonyítás. Mindkét állítás következik az $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln x}$ azonosságból ($x \in \mathbb{R}^+$), hiszen
I. $R(\ln) = \mathbb{R}$, $R(\exp) = \mathbb{R}^+$, és pozitív α esetén $0^\alpha = 0$, és
II. mind a exp, mind az ln függvény szigorúan monoton növő. $\square$

4.8. A hiperbolikus függvények

4.46. Definíció. *A hiperbolikus koszinusz, hiperbolikus szinusz függvényeket az összes valós számok halmazán az*

$$x \mapsto \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} (=: \cosh x) \quad \textit{illetve az} \quad x \mapsto \operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} (=: \sinh x)$$

hozzárendelésekkel értelmezzük (sokan használják a koszinusz hiperbolikusz, szinusz hiperbolikusz elnevezéseket is).

4.47. Tétel. *A* sh *függvény páratlan, szigorúan monoton növő, értékkészlete az összes valós számok halmaza, inverze pedig az* $\mathbb{R} \ni t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2+1})$ *függvény.*

A ch *függvény páros, a* $\operatorname{ch}|_{[0,+\infty)}$ *függvény szigorúan monoton növő, értékkészlete (amely persze egyszersmind a* ch *függvény értékkészlete is) az* $[1, +\infty)$ *intervallum, inverze pedig a* $[1,+\infty) \ni t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2-1})$ *függvény.*

Bizonyítás. A szimmetriatulajdonságok egyszerű behelyettesítésekkel igazolhatók. Az exponenciális függvény szigorúan monoton növő, ezért ilyen az $(1/2)\exp$ és az $x \mapsto (-1/2)e^{-x}$ függvény is, tehát ezek összege, a sh függvény is. Ennek és a $\operatorname{sh} 0 = 0$ egyenlőségnek azt a következményét, hogy a sh függvénynek a nemnegatív helyeken felvett értékei nemnegatívak, mindjárt fel is használjuk: Egyszerű számolással ellenőrizhető ugyanis, hogy minden valós x esetén

$$\operatorname{ch} x = 2\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 + 1 = 2\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1,$$

tehát a $\operatorname{ch}|_{[0,+\infty)}$ függvény előáll szigorúan monoton növő függvények kompozíciójaként:

$$\operatorname{ch}|_{[0,+\infty)} = (2 \cdot \operatorname{id} + 1) \circ \left(\operatorname{id}^2|_{[0,+\infty)}\right) \circ \operatorname{sh} \circ \left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{id}\right).$$

Az sh értékkészletével és inverzével kapcsolatos állítás bizonyítása céljából azt kell bizonyítani, hogy minden egyes valós t esetén a $\operatorname{sh} x = t$ egyenlet egyetlen megoldása az $x = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$ szám. Az $\operatorname{sh} x = t$ egyenletet átrendezve ezt kapjuk:

$$(e^x)^2 - 2te^x - 1 = 0, \tag{4}$$

az $\operatorname{sh} x = t$ egyenlet egyetlen megoldása az

$$s^2 - 2ts - 1 = 0 \tag{5}$$

egyenlet egyetlen *pozitív* megoldásának e alapú logaritmusa. A (5) egyenletnek valóban egyetlen pozitív megoldása van, vagyis

$$t - \sqrt{t^2+1} < 0 < t + \sqrt{t^2+1},$$

hiszen

$$\max\{-t, t\} = |t| = \sqrt{t^2} < \sqrt{t^2+1}.$$

A ch függvény értékkészletével és inverzével kapcsolatos állítások bizonyítása céljából igazolnunk kell egyrészt azt, hogy $t < 1$ esetén a $\operatorname{ch} x = t$ egyenletnek nincs megoldása, másrészt azt, hogy $t \geq 1$ esetén a $\operatorname{ch} x = t$ egyenlet egyetlen nemnegatív megoldása a $t + \sqrt{t^2-1}$ szám. Az előbbi abból adódik, hogy minden valós x-re az e^x, e^{-x} számok mértani közepe 1, tehát a számtani közepük (a $\operatorname{ch} x$ szám) nem lehet 1-nél kisebb. Az utóbbi bizonyítása céljából a $\operatorname{ch} x = t$ egyenletet az

$$(e^x)^2 - 2te^x + 1 = 0$$

alakra hozva látható, hogy egy nemnegatív x szám pontosan akkor megoldása a $\operatorname{ch} x = t$ egyenletnek, ha ez a szám az

$$s \mapsto s^2 - 2ts + 1 \tag{6}$$

polinomfüggvény egy 1-nél nem kisebb gyökének e alapú logaritmusa. A (6) polinomfüggvény gyökeinek szorzata (illetve amikor egyetlen gyöke van, akkor annak négyzete) 1, számtani közepük pedig $t (\geq 1)$, tehát $t = 1$ esetén az egyetlen gyöke 1, $t > 1$ esetén a kisebbik gyöke a $(0, 1)$, a nagyobbik az $(1, +\infty)$ intervallumban van, vagyis mindkét esetben egyetlen 1-nél nem kisebb gyöke van, és ez a $t + \sqrt{t^2-1}$ szám. $\square$

4.48. Definíció. *A* $\operatorname{th} := \operatorname{sh}/\operatorname{ch} (=: \tanh)$ *függvény neve hiperbolikus tangens (vagy tangens hiperbolikusz), a* $\operatorname{cth} := \operatorname{ch}/\operatorname{sh} (=: \coth)$ *függvényé pedig hiperbolikus kotangens (vagy kotangens hiperbolikusz).*

4.49. Tétel. *A* th *függvény páratlan, szigorúan monoton növő, értelmezési tartománya* $\mathbb{R}$*, értékkészlete* $(-1, 1)$*, a* cth *függvény páratlan, injektív, értelmezési tartománya a* 0*-tól különböző valós számok halmaza, értékkészlete az* 1*-nél nagyobb abszolút értékű valós számok halmaza, mind a negatív, mind a pozitív számok halmazára való leszűkítése szigorúan monoton fogyó. A* th *függvény inverzét a*

$$(-1,1) \ni t \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|,$$

a cth *függvényét pedig az*

$$\mathbb{R} \setminus [-1,1] \ni t \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$$

hozzárendeléssel lehet megadni.

Bizonyítás. A th függvény szigorúan monoton növő volta kiolvasható az alábbi átalakításból:

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1,$$

a többi állítás (igen egyszerű) bizonyítása házi feladat. $\square$

4.50. Definíció. *Az* $\operatorname{arch} := \left(\operatorname{ch}|_{[0,+\infty)}\right)^{-1}$, $\operatorname{arsh} := \operatorname{sh}^{-1}$, $\operatorname{arth} := \operatorname{th}^{-1}$, $\operatorname{ar\,cth} := \operatorname{cth}^{-1}$ *függvények neve rendre area koszinusz hiperbolikusz, area szinusz hiperbolikusz, area tangens hiperbolikusz, illetve area kotangens hiperbolikusz.*

4.51. Feladat. *Állapítsuk meg az imént értelmezett függvények értelmezési tartományát, értékkészletét, és monotonitási tulajdonságait.*