# 1. Bevezető

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

   (a) $\cos x + \sin x + \cos x \sin x = 1$,

   (b) $\pi \sin x = \left|x - \frac{\pi}{4}\right| - \left|x - \frac{3\pi}{4}\right|$,

   (c) $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$,

   (d) $x^6 - 3x^2 - 2 = 0$,

   (e) $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 - x$,

   (f) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$,

   (g) $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 2$.

2. A nullától különböző valós $y$ paraméter minden egyes választása mellett oldja meg a következő egyenletet: $y + 1/y = 2 \sin x$.

3. Az $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ paraméter minden választása mellett oldja meg az alábbi egyenletet:

$$\frac{2x - 3(a-1)}{2a} = \frac{2(x-1)}{a-1} - \frac{2x - (a+1)}{a}.$$

4. A valós $a$, $b$ paraméterek minden választása mellett oldja meg az alábbi egyenleteket:

   (a) $2x - a - b = \frac{2b^2}{2x - a}$,

   (b) $\sqrt{ax - 2ab} + \sqrt{ax + b^2} = 2a + b$.

5. A valós $p$ paraméter minden választása mellett oldja meg az alábbi egyenletrendszereket:

   (a) $(p-1)x + 2py = -2, \qquad 2px + (p-1)y = p - 1$,

   (b) $(p-2)^3 x + 2py = 8, \qquad (p-2)x + 2y = 4$.

6. Bizonyítandó, hogy minden valós $x$-re $1 \le 4(\cos^6 x + \sin^6 x) \le 4$.

7. Bizonyítandó, hogy minden olyan valós $x$-re, amelyre $2x/\pi$ nem egész szám,

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \ge 4.$$

8. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

   (a) $|x+2| + |x+1| + |x-4| > 9$,

   (b) $||2x-1| - 3| > 2$,

   (c) $\frac{2x}{|x-3| - 5} + \frac{1}{x+2} \ge 1$,

   (d) $(|x-1| - 3)(|x+2| - 5) < 0$,

   (e) $(1+x)^2 < |1 - x^2|$,

   (f) $\left|\frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$,

   (g) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 3} > 0$.

9. Oldja meg az alábbi két egyenlőtlenségrendszert:

   (a) $2\cos x \le \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| \le \sqrt{2}$,

   (b) $\sqrt{2} \ge \cos x + \sin x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. A valós $p$ paraméter mely értékei mellett van megoldása a $\sqrt{p - x} \ge 2 - x$ egyenlőtlenségnek?

11. A valós $q$ paraméter minden választása mellett oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} \geq q.$$

12. Ábrázolja a koordinátasíkon azokat a pontokat, amelyek $(x, y)$ koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőtlenségeket:

    (a) $2x + y \leq 1$,
    (b) $y - x > x^2$,
    (c) $x^2 \leq y^2$,
    (d) $x^2 + x + y^2 < 0$,
    (e) $(x + y)(x - y)(x + 1) > 0$,
    (f) $x^2 - y^2 \leq |x - y|$.

13. Igaz-e, hogy az alább definiálandó $X$, $Y$ halmazokra *bármely* $A$, $B$, $C$ halmazok esetén teljesül az $X \subset Y$, illetve az $Y \subset X$ tartalmazás?

    (a) $X := (A \cap B) \setminus C, \quad Y := (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,
    (b) $X := (A \setminus B) \setminus C, \quad Y := (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$,
    (c) $X := A \setminus C, \quad Y := (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$,
    (d) $X := A \setminus (B \setminus C), \quad Y := (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$.

14. Bizonyítandó, hogy minden pozitív egész $n$-re és bármely $x$, $y$ valós számokra

    (a) $\boxed{\mathbf{V}}$ $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (binomiális tétel),
    (b) $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1-k} x^k$,
    (c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
    (d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
    (e) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

15. Mennyi az első $n$ páratlan pozitív egész négyzetének összege?

16. Fogalmazza meg az alábbi állítások mindegyikének a tagadását tagadószó használata nélkül, majd döntse el, hogy az eredeti állítás az igaz, vagy a tagadása:

    (a) Minden megyénkben van olyan település, melynek minden utcájában van földszintes ház.
    (b) Minden egyes $p$ pozitív számhoz található olyan $K$ pozitív szám, melyre minden $K$-nál nagyobb $x$ valós szám esetén $x^2 - px + 1 > 0$.
    (c) Van olyan $K$ pozitív szám, amely mellett minden $p$ pozitív számhoz található olyan $q$ pozitív szám, hogy minden $K$-nál nagyobb $x$ valós szám esetén $x^2 - px + q > 0$.
    (d) Minden $p$ pozitív számhoz található olyan $K$ pozitív szám, amelynél nagyobb $x$ valós számok mindegyikére $x \sin(p/x) > 0$.
    (e) Minden $p$ pozitív számhoz található olyan $K$ pozitív szám, amelynél nagyobb $x$ valós számok mindegyikére $\cos \sqrt{p/x} > 0$.
    (f) Minden korlátos $H$ számhalmazhoz található olyan $K$ valós szám, melyre minden valós $x$ esetén igaz az $|x| \geq K \Rightarrow x \notin H$ implikáció.

17. Van-e az alábbi számhalmazoknak legkisebb, illetve legnagyobb eleme?

(a) $\{p \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in (p, +\infty) \quad \cos\sqrt{1/(2x)} > 0\}$,

(b) $\{p \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{Z}$, melyre $|x-k| < p\}$.

18. Van-e legkisebb, illetve legnagyobb értéke annak a függvénynek, amely minden egyes valós $p$ számhoz az $x^2 + (p-1)x - p = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszegét rendeli?

19. Van-e legkisebb, illetve legnagyobb értéke az összes pozitív számok halmazán értelmezett $x \mapsto x/(1+x)$ függvénynek?

20. Van-e legkisebb, illetve legnagyobb értéke az összes valós számok halmazán értelmezett

    (a) $x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+2}{x^2+x+1}$, (b) $x \mapsto \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$

    függvénynek?

21. Van-e legkisebb, illetve legnagyobb értéke a $H \ni (x,y) \mapsto 2x - y + 2$ függvénynek, ha $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x^2 - 4x + 2\}$?

22. Léteznek-e az alábbi valós számok?

    (a) $\max\{\min\{x \in \mathbb{R} : x^2 - (p+1)x + p \leq 0\} : p \in \mathbb{R}\}$,

    (b) $\max\{\min\{x \in [(p+1)/2, +\infty) : x^2 - (p+1)x + p \geq 0\} : p \in \mathbb{R}\}$,

    (c)
$$\max\left\{\min\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{2x-x^2} : x \in \mathbb{R}\right\} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

23. Bizonyítandó, hogy ha a 0-tól különböző $u$ és $v$ számok összege pozitív, akkor
$$\frac{u}{v^2} + \frac{v}{u^2} \geq \frac{1}{u} + \frac{1}{v}.$$

24. Megválasztható-e a valós $p$ és a pozitív $r$ paraméter úgy, hogy az
$$f : [-r, r] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2} + 4x + p$$
    függvény értékkészlete a $[0, 8]$ intervallum legyen?

25. $\boxed{\mathbf{V}}$ (Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség) Ha $n$ 1-nél nagyobb egész, és a $t_1, \ldots, t_n$ számokra teljesül egyrészt az, hogy közülük legalább kettő nullától különböző, másrészt az, hogy vagy mindegyikük a $(-1, 0]$, vagy mindegyikük a $[0, +\infty)$ intervallumban van, akkor az $(1+t_1), (1+t_2), \ldots, (1+t_n)$ számok szorzata nagyobb, mint $1 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$.

**1.1. definíció (binomiális együtthatók).** *Legyen $\alpha$ valós szám. Minden pozitív egész $n$ esetén*
$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}, \qquad \textit{továbbá} \qquad \binom{\alpha}{0} := 1\,. \qquad \boxed{\boldsymbol{V}}$$

26. Bizonyítandó, hogy ha $n$ pozitív egész és $\alpha \in (-1, 0)$, akkor
$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| < \frac{1}{(\alpha+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}.$$

27. $\boxed{\mathbf{V}}$ (Cauchy–Schwarz-féle egyenlőtlenség) Bizonyítandó, hogy ha $n$ pozitív egész és $x_1, \dots, x_n$, valamint $y_1, \dots, y_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Mikor érvényes a ,,$<$" és mikor az ,,$=$" jel?

Segítség: Végezzünk esetszétválasztást aszerint, hogy a jobb oldal 0 vagy pozitív; az utóbbi esetben osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát a jobb oldallal, majd alkalmazzuk a nyilvánvaló

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenség átrendezésével adódó

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

egyenlőtlenséget az alábbi szereposztással:

$$a_k := \frac{|x_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}, \qquad b_k := \frac{|y_k|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

28. Tekintsük azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek átfogójának hossza a rögzített $c$ pozitív szám. A befogókat $x$-szel, illetve $y$-nal jelölve,

   (a) bizonyítandó, hogy $4x + 3y \leq 5c$,

   (b) mikor lesz $4x + 3y$ a lehető legnagyobb?

**1.2. definíció (hatványközepek).** *Ha $n$ pozitív egész és $v$ nullától különböző valós szám, akkor a $p_1, \dots, p_n$ pozitív valós számok $v$ kitevőjű hatványközepén a*

$$\left( \frac{p_1^v + \ldots + p_n^v}{n} \right)^{1/v}$$

*számot értjük. A ,,$v$ kitevőjű hatványközép" kifejezés helyett $v = -1$ esetén a ,,harmonikus közép", $v = 2$ esetén a ,,négyzetes közép", illetve minden 1-nél nagyobb egész $v$ esetén a ,,$v$-edik hatványközép" kifejezést" is szokták használni, $v = 1$ esetén pedig kizárólag a ,,számtani közép" kifejezést. Páratlan pozitív egészek hányadosaként előállítható $v$ esetén a $p_i$ számok előjelére vonatkozó kikötés elhagyható.*

29. Bizonyítandó, hogy bármely pozitív egész $n$ és bármely $(x_1, \dots, x_n)$ valós szám-$n$-es esetén az $x_i$ számok számtani közepének abszolút értéke nem nagyobb, mint ugyanezen számok négyzetes közepe.

30. Bizonyítandó, hogy ha $n$ pozitív egész, $a_1, \dots, a_n$ pozitív számok, $p_1, \dots, p_n$ pedig olyan pozitív racionális számok, amelyek reciprokainak összege 1-gyel egyenlő, akkor

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq \frac{a_1^{p_1}}{p_1} + \frac{a_2^{p_2}}{p_2} + \cdots + \frac{a_n^{p_n}}{p_n}.$$

Mikor érvényes a ,,$<$", és mikor az ,,$=$" jel?

31. Bizonyítandó, hogy ha $n$ pozitív egész, $a$ és $b$ pedig pozitív számok, akkor

$$ab \leq \frac{1}{n+1}a^{n+1} + \frac{n}{n+1}b^{\frac{n+1}{n}}.$$

Mikor érvényes a „<", és mikor az „=" jel?

32.* Legyen $m$ pozitív egész, $y_1, \ldots, y_m$ pozitív számok. Bizonyítandó, hogy ha az $y_i$ számok között van két különböző, akkor az a sorozat, amelynek $n$-edik tagja az $y_1, \ldots, y_m$ számok $n$-edik hatványközepével egyenlő, szigorúan monoton növő.

33. Bizonyítandó, hogy ha $a$, $b$ és $c$ pozitív számok, akkor

(a) $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} \geq 6$,

(b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 3$,

(c) $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$,

(d)* $a^2 + b^2 + c^2 + 4 \geq ab + 3b + 2c$,

(e)* $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$,

(f)* $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc$,

(g)* $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$.

Mikor érvényes a „<", és mikor az „=" jel?

34. Keressük meg a legkisebb olyan pozitív egész számot, amelytől kezdve minden $n$ egészre

(a) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} > n$,

(b) $(n+4)^4 < 4^{n+4}$,

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$,

(d) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$,

(e) $(n+1)^n < n^{n+1}$,

(f) $n^2 < 2^n$.

35. Bizonyítandó, hogy

(a) $\dfrac{1}{51} + \dfrac{1}{52} + \dfrac{1}{53} + \ldots + \dfrac{1}{200} > 1$,

(b) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{64} > 4\,.$

36. Bizonyítandó, hogy minden pozitív egész $n$-re

(a)

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < 1\,,$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}\,,$$

(c)

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \overset{\boxed{\mathbf{V}}}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

(d) $\dfrac{4^n}{2n} \leq \dbinom{2n}{n} < \dfrac{4^n}{\sqrt{n+1}}$,

(e) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$,

(f) $n! \le \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$,

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$,

(h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$,

(i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3\,$,

37. Bizonyítandó, hogy ha $n$ pozitív egész, $k$ pedig $n$-nél nem nagyobb pozitív egész, akkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\,.$$

38. Bizonyítandó, hogy ha $n > 1$ egész és $p > 1$, akkor

$$\sqrt[n]{p} - 1 < \frac{p-1}{n}.$$

39. Mi a valós számok halmazának az a legbővebb részhalmaza, amelyen az alábbi hozzárendelés értelmezhető?

(a) $x \mapsto \lg \sin x$,

(b) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-4}{4x+5}}$,

(c) $x \mapsto \sqrt{-(x-5)^2}$,

(d) $x \mapsto \ln \dfrac{1}{\ln(1-x)+1}$.

40. Az alábbi $f, g$ függvényekkel képezzük az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvényeket, majd állapítsuk meg, hogy melyikük injektív és melyikük nem injektív!

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2, \qquad g : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad g(x) := \sqrt{x}$,

(b) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \dfrac{1}{x}, \qquad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \dfrac{1}{x^2}$,

(c) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1 - x^2, \qquad g(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$.

41. Adjon példát nem monoton, injektív $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre!

42. Az alábbi függvények mindegyikével kapcsolatban válaszoljon a következő kérdésekre: Mi a függvény értékkészlete? Injektív-e a függvény, s ha igen, akkor mi az inverze? Melyek a függvénynek a maximális intervallumon értelmezett injektív leszűkítései, és mi ezen leszűkítések inverze? [Az intervallumon értelmezett injektív $\psi$ függvényről akkor mondjuk, hogy *maximális* intervallumon értelmezett injektív leszűkítése az egyváltozós valós $\varphi$ függvénynek, ha egyrészt $\psi$ leszűkítése $\varphi$-nek, másrészt nincs olyan $J$ intervallum, amelyre teljesülnének a következők: $J \ne D(\psi) \subset J \subset D(\varphi)$, és $\varphi|_J$ injektív.]

(a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a \ne 0)$,

(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \dfrac{a}{x} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(c) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \lg(100x^2)$,

(d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1/3\} \ni x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+2x-1}$,

(e) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$,

(f) $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|.$,

(g) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{1}{2}(p^x + p^{-x}) \quad (p > 0)$,

(h) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{1}{2}(p^x - p^{-x}) \quad (p > 0)$,

(i) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \dfrac{p^x - p^{-x}}{p^x + p^{-x}} \quad (p > 0)$.

## 2. Számhalmaz alsó, illetve felső határa

**2.1. definíció (komplexusműveletek).** *Ha $A$ és $B$ valós számhalmazok, akkor $A$ és $B$ (komplexus)összegén, (komplexus)különbségén, illetve (komplexus)szorzatán azoknak a valós számoknak a halmazát értjük, amelyek előállnak egy $A$-beli és egy $B$-beli szám összegeként, különbségeként, illetve szorzataként. Jelölés: $A+B$, $A-B$, illetve $AB$. Ha $c$ valós szám és $H$ valós számhalmaz, akkor a $H$ halmaz $c$-szeresén a $cH := \{c\}H$ halmazt értjük. A $(-1)H$ helyett a rövidebb $-H$ jelölést használjuk.*

43. Bizonyítandó, hogy egy valós számhalmaz pontosan akkor alulról korlátos, ha a $(-1)$-szerese felülről korlátos és (következésképpen) pontosan akkor felül korlátos, ha a $(-1)$-szerese alulról korlátos.

44. Bizonyítandó, hogy ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról [felülről] korlátos, akkor $\inf H = -\sup(-H)$ [$\sup H = -\inf(-H)$].

45. $\boxed{\mathbf{V}}$ Bizonyítandó, hogy ha $A$ és $B$ felülről [alulról] korlátos nemüres számhalmazok, akkor $A+B$ is ilyen, és $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ $\quad$ [$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$].

46. Bizonyítandó, hogy ha a nemüres $A$ és $B$ számhalmazok minden eleme nemnegatív, akkor $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$.

47. Bizonyítandó, hogy ha a felülről korlátos, nemüres $A$ és $B$ számhalmazok minden eleme nemnegatív, akkor $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

48. Bizonyítsuk be, hogy nemüres korlátos számhalmazok szorzata korlátos, és — lehetőleg kevés esetszétválasztással — adjuk meg a szorzathalmaz felső, illetve alsó határát.

49. Legyen minden pozitív egész $n$ és $A \subset \mathbb{R}$ esetén $A^n := \{a^n : a \in A\}$. Az alábbi állítások közül válasszuk ki azokat, amelyek minden nemüres korlátos $A$ számhalmaz esetén igazak:

    (a) $A^2 = A \cdot A$, $\quad$ (c) $\inf A^2 = \inf(A \cdot A)$, $\quad$ (e) $\sup A^2 = (\sup A)^2$,

    (b) $\sup A^2 = \sup(A \cdot A)$, $\quad$ (d) $\inf A^3 = (\inf A)^3$, $\quad$ (f) $\sup A^3 = (\sup A)^3$.

50. Az $A$ számhalmazról tegyük fel egyrészt azt, hogy negatív és pozitív szám egyaránt van benne, másrészt azt, hogy van olyan pozitív $r$ szám, amelyre $A \cap (-r, r) = \emptyset$. Következik-e ebből, hogy az $A$-beli számok reciprokaiból álló $B$ halmaz korlátos? Mit lehet állítani a $B$ halmaz alsó, illetve felső határáról? Vizsgáljuk ugyanezeket a kérdéseket abban az esetben is, amikor az $A$-ra vonatkozó első feltételt azzal az enyhébb feltétellel helyettesítjük, hogy legyen $A$ nemüres számhalmaz!

51. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény és $H$ nemüres felülről [alulról] korlátos számhalmaz. Bizonyítandó, hogy ekkor az $f(H) := \{f(x) : x \in H\}$ halmaz szintén felülről [alulról] korlátos, és $\sup f(H) \leq f(\sup H)$ [$\inf f(H) \geq f(\inf H)$]. Adjunk példát olyan $H$ halmazra és $f$ függvényre, melyekre $\sup f(H) < f(\sup H)$! Fogalmazzuk meg ennek a feladatnak azt a párját, amely monoton fogyó függvényről szól!

52. Bizonyítandó, hogy ha $A$ és $B$ felülről [alulról] korlátos nemüres számhalmazok, akkor az uniójuk is ilyen, és $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ $\quad$ [$\inf(A \cap B) = \min\{\inf A, \inf B\}$].

53. Bizonyítandó, hogy ha $A$ és $B$ felülről [alulról] korlátos számhalmazok, és a metszetük nemüres, akkor $A \cap B$ szintén felülről [alulról] korlátos. Mit lehet állítani ekkor a metszethalmaz felső [alsó] határáról?

54. Bizonyítandó, hogy ha $H$ korlátos nemüres számhalmaz, akkor

$$\sup H - \inf H = \sup(H - H) = \sup\{|x-y| : x \in H, y \in H\}.$$

55. Bizonyítandó, hogy tetszőleges negatív racionális $r$ szám esetén $\inf\{n^r : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

56. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $v$ valós szám esetén a $v$-nál kisebb racionális számok halmazának felső határa, és a $v$-nél nagyobb racionális számok halmazának alsó határa egyaránt $v$-vel egyenlő.

**2.2. definíció (diadikus racionális számok).** *A*

$$\mathbb{D} := \{k \cdot 2^{-n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \cap [0, +\infty)\}$$

*halmaz elemeit diadikus racionális számoknak nevezzük.*

57. Bizonyítandó, hogy tetszőleges $v$ valós szám esetén a $v$-nál kisebb diadikus racionális számok halmazának felső határa, és a $v$-nél nagyobb diadikus racionális számok halmazának alsó határa egyaránt $v$-vel egyenlő.

**2.3. definíció (szemifaktoriálisok).** *Minden pozitív egész $n$ esetén az első $n$ páratlan [páros] pozitív egész szám szorzatát így jelöljük: $(2n-1)!!$ [$(2n)!!$] (olv.: $2n-1$ [$2n$] szemifaktoriális). A definíciót $n = 0$-ra ezzel a megállapodással terjesztjük ki: $(-1)!! := 0!! := 1$.* $\boxed{\textbf{\textit{V}}}$

58. Határozzuk meg az alábbi halmazok — esetleg csak $\overline{\mathbb{R}}$-ban létező — alsó és felső határát:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\}$,

(b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$,

(c) $\{x \in \mathbb{D} : x^2 < 3\}$,

(d) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$,

(e) $\left\{\dfrac{m}{n} + \dfrac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(f) $\left\{\dfrac{kn}{4k^2 + n^2} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(g) $\left\{\dfrac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(h) $\left\{\dfrac{n-1}{n+1} \cos\dfrac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(i) $\left\{\dfrac{k}{|k| + n} : k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(j) $\left\{\dfrac{mn}{1+m+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(k) $\left\{\sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right] : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(l) $\left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(m) $\left\{4^{-n} \cdot \binom{2n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(n) $\left\{\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(o) $\left\{\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(p) $\left\{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(q) $\left\{\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(r) $\left\{\dfrac{(n+1)(n+2)}{\binom{2n}{n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(s) $\left\{\binom{\alpha}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad (\alpha \in [-1, 1])$,

(t) $\left\{\left|\binom{\alpha}{n}\right| : n \in \mathbb{N}\right\} \quad (\alpha \in [-1, 1])$,

(u) $\{k + l\sqrt{2} : k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{R}^+$,

(v) $\{\sqrt{3} + p\sqrt{5} + q\sqrt{7} : p, q \in \mathbb{Q}\} \cap \mathbb{R}^+$,

(w) $\left\{\dfrac{xy}{x^2 + y^2} : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}\right\}$,

(x) $\left\{\dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y} + \dfrac{x+y}{z} : x, y, z \in \mathbb{R}^+\right\}$.

# 3. Számsorozat határértéke

59. Az alábbi sorozatok mindegyikéről döntse el, hogy van-e határértéke, s ha van, akkor keresse meg a határértékét! Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a sorozat $n$-edik tagja legyen

(a) $n^{-\frac{1}{2004}}$,

(b) $\dfrac{n}{2004\sqrt{n}+1}$,

(c) $1+\dfrac{1}{n}$,

(d) $\dfrac{3\sqrt[4]{n}+4\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$,

(e) $\dfrac{2n+1}{3n-2}$,

(f) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

(g) $n-n^2$,

(h) $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}$,

(i) $\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n}$,

(j) $n(\sqrt{n^4+4}-n^2)$,

(k) $n^2(\sqrt{n^4+4}-n^2)$,

(l) $n^3(\sqrt{n^4+4}-n^2)$,

(m) $\dfrac{2n^2-3n+9}{5n-n^2-7}$,

(n) $\dfrac{2n-3n^3+n^2}{5-4n^2-4n^3}$,

(o) $\dfrac{3n+\sqrt{n^4-10}}{5n^2+7}$,

(p) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(3k-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$,

(q) $\dfrac{2n^2+n+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^7+5n^2+\pi}}$,

(r) $\dfrac{n^2-3n+2}{2-3n^3+n}$,

(s) $\dfrac{-4n^3+n+5n^3}{2n^2-3n+6}$,

(t) $\dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$,

(u) $\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$,

(v) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}$,

(w) $\dfrac{1-2+3-\ldots-2n}{2+4+6+\ldots+2n}$,

(x) $n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$,

(y) $n^3\left(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{n^8-1}\right)$,

(z) $\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}\right)$.

60. Nullsorozat-e az a sorozat, amelynek $n$-edik tagja minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

(a) $\dfrac{n!}{n^n}$,

(b) $\dfrac{(2n)!!}{n^n}$,

(c) $\dfrac{(2n)!}{2n^2!}$,

(d) $\dfrac{(2n)!!}{5^{n^2}}$,

(e) $\dfrac{(n+1)!}{n^n}$,

(f) $\dfrac{(3n)!}{2^{n^2}}$,

(g) $\dfrac{n^5}{(2n)!}$,

(h) $\dfrac{(2n+1)!!}{n^n}$,

(i) $\dfrac{n^n}{(2n)!}$,

(j) $\dfrac{(2n)^n}{(2n-1)!}$,

(k) $\dfrac{n^n}{(n!)^2}$,

(l) $\dfrac{2^{3n}}{n!}$,

(m) $\dfrac{n^n}{[(n+1)!]^2}$,

(n) $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$,

(o) $\dfrac{(2n)!!}{\sqrt[4]{n^3}(2n-1)!!}$,

(p) $\dfrac{\binom{2n}{n}}{k^n}$ $(k \in \mathbb{N})$,

(q) $\dfrac{\left(\frac{9}{2}\right)^n}{\binom{3n}{n}}$,

(r) $\dfrac{\binom{3n}{n}}{n!}$,

(s) $\dfrac{\binom{2n}{n}}{\binom{3n}{n}}$,

(t) $\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)^{-1}$,

(u) $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\right)^{-1}$,

(v) $\binom{x}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(w) $\dfrac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}$,

(x) $\dfrac{\sqrt[n]{(2n)!!}}{n\sqrt{n}}$,

(y) $\dfrac{\sqrt{(2n-1)!!}}{(\sqrt{n})^n}$,

(z) $n^{2n}\left(\sqrt{n^4+\sqrt{3}}-n^2\right)^n$.

61. Legyen $(a_n)$ valós számsorozat és $A$ valós szám. Mit jelentenek az alábbi állítások? Az alábbi állítások közül melyekből következik az, hogy $(a_n)$ tart $A$-hoz, melyekből következik

az, hogy $(a_n)$ nem tart $A$-hoz, melyek következnek abból, hogy $(a_n)$ tart $A$-hoz, végül melyek következnek abból, hogy $(a_n)$ nem tart $A$-hoz?

(a) $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - A| > \varepsilon)$,

(b) $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon)$,

(c) $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n - A| < \varepsilon$,

(d) $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon)$,

(e) $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \text{ és } |a_n - A| < \varepsilon)$,

(f) $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon)$,

(g) $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon)$.

62. $\boxed{\textbf{V}}$ Fogalmazza meg tagadószó használata nélkül az alábbi állításokat:

(a) az $A$ szám nem határértéke az $(a_n)$ számsorozatnak,

(b) az $(a_n)$ számsorozat divergens.

63. Adjon példát olyan konvergens sorozatra, amely előáll két divergens sorozat összegeként!

64. Van-e olyan konvergens sorozat, amely előáll egy konvergens és egy divergens sorozat összegeként?

65. Adjon példát olyan konvergens sorozatra, amely előáll két divergens sorozat szorzataként!

66. Van-e olyan konvergens sorozat, amely előáll egy konvergens és egy divergens sorozat szorzataként?

67. Igaz-e, hogy *minden* konvergens sorozat előállítható két divergens sorozat összegeként?

68. Igaz-e, hogy *minden* konvergens sorozat előállítható két divergens sorozat szorzataként?

69. Igaz-e, hogy *minden* konvergens sorozat előállítható két divergens sorozat hányadosaként?

70. Bizonyítsa be, hogy ha az $(x_n)$ sorozat konvergál egy nullától különböző számhoz, akkor minden egyes rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén az (esetleg általánosabb értelemben értendő) $(x_{n+k}/x_n)$ sorozat konvergens.

71. Adjon példát olyan $(x_n)$, $(y_n)$ nullsorozatokra, melyek egyetlen tagja sem nulla, s melyekre az $(x_{n+1}/x_n)$ sorozat konvergens, az $(y_{n+1}/y_n)$ sorozat pedig divergens.

72. Adjon példát olyan korlátos divergens $(x_n)$, $(y_n)$ sorozatokra, melyek egyetlen tagja sem nulla, s melyekre az $(x_{n+1}/x_n)$ sorozat konvergens, az $(y_{n+1}/y_n)$ sorozat pedig divergens.

73. Adjon példát olyan divergens $(x_n)$ sorozatra, amelyre minden egyes rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(x_{n+k}/x_n)$ sorozat határértéke 1.

74. Adjon példát olyan divergens $(x_n)$ sorozatra, amelyre minden egyes rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(x_{n+k}/x_n)$ sorozat határértéke 1-nél nagyobb valós szám.

75. Adjon példát olyan divergens $(x_n)$ sorozatra, amelyre minden egyes rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(x_{n+k}/x_n)$ sorozat határértéke $+\infty$.

76. Adjon példát olyan divergens $(x_n)$ sorozatra, amelyre minden egyes rögzített páratlan $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(x_{n+k}/x_n)$ sorozat határértéke $-\infty$.

77. Bizonyítsa be, hogy ha $(x_n)$ konvergens, akkor minden egyes $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(x_{n+k} - x_n)$ sorozat konvergens.

78. Adjon példát olyan divergens $(x_n)$ sorozatra, melyre minden egyes $k \in \mathbb{N}$ esetén az $(x_{n+k}-x_n)$ sorozat nullsorozat.

79. $\boxed{\mathbf{V}}$

   (a) Melyek a konvergens számtani sorozatok, és melyek a konvergens mértani sorozatok?

   (b) Melyek azok a mértani sorozatok, amelyeknek nincs határértéke?

80. $\boxed{\mathbf{V}}$ Adjon példát olyan $+\infty$-hez tartó $(x_n)$, $(y_n)$ sorozatokra, melyekre az $(x_n - y_n)$ sorozat határértéke

   (a) egyenlő $-\infty$-nel, (b) egyenlő $+\infty$-nel, (c) nem létezik,

   (d) egyenlő egy előre megadott valós számmal.

81. $\boxed{\mathbf{V}}$ Adjon példát olyan $(x_n)$ nullsorozatra és $+\infty$-hez tartó $(y_n)$ sorozatra, melyekre az $(x_n \cdot y_n)$ sorozat határértéke

   (a) egyenlő $-\infty$-nel, (b) egyenlő $+\infty$-nel, (c) nem létezik,

   (d) egyenlő egy előre megadott valós számmal.

82. $\boxed{\mathbf{V}}$ Adjon példát olyan 0-hoz tartó $(x_n)$, $(y_n)$ sorozatokra, melyekre egyrészt minden $n$-re $y_n \neq 0$, másrészt az $(x_n/y_n)$ sorozat határértéke

   (a) egyenlő $-\infty$-nel, (b) egyenlő $+\infty$-nel, (c) nem létezik,

   (d) egyenlő egy előre megadott valós számmal.

83. Hogyan viselkedhet két $+\infty$-hez tartó sorozat hányadosa — határérték szempontjából?

84. $\boxed{\mathbf{V}}$ Bizonyítsa be, hogy ha az $(x_n)$ sorozathoz található olyan $\delta$ pozitív szám, melyre valamely küszöbindextől kezdve minden pozitív egész $n$-re

   (a) $|x_n| \leq 1 - \delta$, akkor $\lim(x_n^n) = 0$,

   (b) $x_n \geq 1 + \delta$, akkor $\lim(x_n^n) = +\infty$.

85. $\boxed{\mathbf{V}}$ Adjon példát olyan 1-hez tartó $(x_n)$ sorozatra, amelyre az $(x_n^n)$ sorozat határértéke

   (a) egyenlő 0-val, (b) egyenlő $+\infty$-nel, (c) nem létezik,

   (d) egyenlő az előre megadott $p$ pozitív számmal.

86. $\boxed{\mathbf{V}}$ Adjon példát olyan pozitív tagú $(x_n)$ nullsorozatra, amelyre az $(\sqrt[n]{x_n})$ sorozat határértéke

(a) egyenlő 0-val, (b) egyenlő 1-gyel, (c) nem létezik,

(d) egyenlő az előre megadott $p \in (0,1)$ számmal.

87. $\boxed{\mathbf{V}}$ Adjon példát olyan $+\infty$-hez tartó $(x_n)$ sorozatra, amelyre az $(\sqrt[n]{x_n})$ sorozat határértéke

(a) egyenlő $+\infty$-nel, (b) egyenlő 1-gyel, (c) nem létezik,

(d) egyenlő az előre megadott 1-nél nagyobb $A$ számmal.

88. Az alábbi sorozatok mindegyikéről döntse el, hogy van-e határértéke, s ha van, akkor keresse meg a határértékét! Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a sorozat $n$-edik tagja legyen

(a) $\dfrac{(n+4)! - (n+2)!}{n+3!}$,

(b) $\dfrac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$,

(c) $\dfrac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$,

(d) $\dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$,

(e) $\dfrac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}$,

(f) $\dfrac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}$,

(g) $\sqrt[n]{5n^2 + 2n + 3}$,

(h) $\sqrt[n]{2004^n + 2005^n}$

(i) $\left(1 + \dfrac{n - \sqrt{2}}{5n}\right)^n$,

(j) $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$,

(k) $\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$,

(l) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$,

(m) $\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$,

(n) $\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^n$,

(o) $\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$,

(p) $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ \sqrt[3n]{n!}$,

(q) $\dfrac{x^n}{x^{2n}+2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$,

(r) $\dfrac{x^{2n}}{x^n+2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$,

(s) $\dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

(t) $\dfrac{n!}{n^n}$,

(u) $\dfrac{(2^n+7^n)^2}{n!}$,

(v) $\left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(w) $\left(\dfrac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(x) $\left(\dfrac{(n!)^3}{n^{3n}e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(y) $\left(\dfrac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(z) $\dfrac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$ $\quad (k \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$.

89. Bizonyítsa be, hogy minden pozitív egész $k$ mellett

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k = \frac{1}{k+1}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^k}\sum_{i=1}^n i^k - \frac{n}{k+1}\right) = \frac{1}{2}$.

90. Az $x$ paraméter minden egyes nemnegatív értéke mellett vizsgálja meg az $\left(\sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^k}\right)$ sorozatot határérték szempontjából!

91. Legyen $(p_n)$ olyan pozitív tagú sorozat, amelyre létezik a $\lim(p_{n+1}/p_n) =: A$ határérték. Bizonyítsa be, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{p_n})$ sorozat is tart $A$-hoz.

92. Bizonyítsa be, hogy az a sorozat, melynek $n$-edik tagját az alábbi formulával értelmezzük, konvergens:

(a) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, (b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$,

(c) $\prod_{k=1}^{n} \cos x_k$, ahol $(x_n)$ tetszőleges nullsorozat.

93. Legyen minden pozitív egész $n$-re

$$a_n := \frac{1}{n+1} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right), \qquad b_n := \frac{1}{n} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \qquad (\exp(x) := e^x).$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $(a_n)$ szigorúan monoton növő, $(b_n)$ szigorúan monoton fogyó sorozat,

(b) e két sorozat azonos határértékhez — éspedig pozitív számhoz — konvergál,

(c) a $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$ sorozat konvergens,

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right) = 2, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

(Az $e$ alapú exponenciális függvény inverzeként értelmezett ln függvényről felhasználhatja mindazt, amit a középiskolában az 1-nél nagyobb alapú logaritmusfüggvényekről tanult).

94. Bizonyítsa be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$.

95. Bizonyítsa be, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\alpha_n$ számot az

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\alpha_n}{n \cdot n!}$$

egyenlőséggel értelmezzük, akkor $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.

96. Bizonyítsa be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1 < \left[(n+1)!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\right]^n < e.$$

97. Az alábbi sorozatok mindegyikéről döntse el, hogy van-e határértéke, s ha van, akkor keresse meg a határértékét! Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a sorozat $n$-edik tagja legyen

(a) $\cos nx \quad (x \in \mathbb{R})$, (c) $\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$, (e) $\sqrt{n} \cdot \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,

(b) $\sin nx \quad (x \in \mathbb{R})$, (d) $\cos\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$, (f) $n[\cos(2\pi\sqrt{n^2+1}) - 1]$.

(g) $\cos x_n \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = u \in \mathbb{R})$, (h) $\sin x_n \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = u \in \mathbb{R})$.

(A trigonometrikus függvényekkel kapcsolatban felhasználható a $|\sin x| \le |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenlőtlenség, s mindaz, amit e függvényekről a középiskolában tanult.)

98. Legyenek $(k_n)$ és $(m_n)$ tetszőleges indexsorozatok. Bizonyítsa be, hogy ekkor az a sorozat is indexsorozat, amelynek $n$-edik tagja

(a) $k_n + m_n$, (c) $(m_n)^{k_n}$, (e) $2^{k_n}$, (g) $(m_n)^{n^2}$,
(b) $k_n \cdot m_n$, (d) $k_{m_n}$, (f) $k_n!$, (h) $k_n^2 + m_n^2$,

(i) $m_{m_n}$, (j) $\binom{2k_n+m_n}{3}$, (k) $2004k_n + 2005m_n$.

99. Legyen minden pozitív egész $n$-re $a_n := \frac{1}{n}$, $b_n := \sqrt[n]{n}$, $c_n := \frac{2n-3}{n+1}$, $\varphi_1(n) := 2n-1$, $\varphi_2(n) := 2n$, $\varphi_3(n) := n^2$, $\varphi_4(n) := 2^n$. Írja fel $(a_n)$, $(b_n)$ és $(c_n)$ azon részsorozatainak első négy-négy tagját, amelyeket a fenti $\varphi_k$ indexsorozatok $(k = 1, 2, 3, 4)$ határoznak meg.

100. Bizonyítsa be, hogy ha $(b_n)$ részsorozata $(a_n)$-nek és $(c_n)$ a $(b_n)$-nek, akkor $(c_n)$ részsorozata $(a_n)$-nek.

101. Bizonyítsa be, hogy ha az $(a_n)$ sorozat minden részsorozatának van 0-hoz tartó részsorozata, akkor $(a_n)$ nullsorozat.

102. Bizonyítsa be, hogy ha mind az $n \mapsto x_{2n-1}$, mind az $n \mapsto x_{2n}$ sorozat tart az $u$ valós számhoz, akkor $\lim(x_n) = u$.

103. Legyen az $(x_n)$ valós számsorozatnak a $(2n)$, $(2n+1)$, illetve a $(3n)$ indexsorozathoz tartozó részsorozata rendre az $(a_n)$, a $(b_n)$, illetve a $(c_n)$ sorozat. Bizonyítsa be, hogy ha az utóbbi három sorozat konvergens, akkor $(x_n)$ is, majd adjon példát olyan *divergens* $(x_n)$ sorozatra, amelyre

(a) $(b_n)$ és $(c_n)$ konvergens, (b) $(a_n)$ és $(c_n)$ konvergens, (c) $(a_n)$ és $(b_n)$ konvergens.

104. $\boxed{\mathbf{V}}$ Bizonyítsa be, hogy bármely valós számsorozatnak van olyan részsorozata, amelynek van határértéke.

105. Mi azoknak a valós számoknak az $X$ halmaza, illetve $\overline{\mathbb{R}}$ azon elemeinek $Y$ halmaza, amelyek előállnak az $(a_n)$ sorozat valamely részsorozatának határértékeként, ha $a_n =$

(a) $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, (d) $\dfrac{n-1}{n+1} \cos \dfrac{2n\pi}{3}$, (g) $\dfrac{2n^2}{1+n^2} \cos \dfrac{2n\pi}{3}$,
(b) $1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$, (e) $2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, (h) $\sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$,
(c) $n^{(-1)^n}$, (f) $1 + n \sin \dfrac{n\pi}{2}$, (i) $\cos^n \dfrac{n\pi}{3}$.

106. Bizonyítsa be, hogy egy valós $(x_n)$ számsorozat pontosan akkor konvergens, ha minden pozitív $\varepsilon$-hoz található olyan pozitív egész $m$, hogy az $m$-nél nagyobb $n$ egészek mindegyikére $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

107. $\boxed{\mathbf{V}}$ Bizonyítsa be, hogy ha $r \in \mathbb{Q}$, $u \in \mathbb{R}$, és az $(x_n)$ sorozat határértéke $u$, akkor az alábbi esetek mindegyikében $\lim_{n\to\infty} x_n^r = u^r$:

(a) $r < 0 < u$, és $(x_n)$ pozitív tagú sorozat,
(b) $0 \le r$, $0 \le u$, és $(x_n)$ nemnegatív tagú sorozat,
(c) $r$ előállítható egy negatív egész és egy páratlan pozitív egész hányadosaként; $u$ is, és minden $n$-re $x_n$ is nullától különböző,
(d) $r$ előállítható egy pozitív egész és egy páratlan pozitív egész hányadosaként.

108. Vizsgálja meg az alábbi, rekurzív módon megadott $(a_n)$ sorozatok mindegyikét határérték szempontjából, s ha létezik a határérték, akkor állítsa is elő azt (az egyes feladatokban szereplő paraméterek jelentése: $p$ tetszőleges pozitív szám, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$):

(a) $a_1 := p, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},$

(b) $a_1 := p + 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2},$

(c) $a_1 := p - 6, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6},$

(d) $a_1 := p + 6, \qquad a_{n+1} = (a_n - 3)^2,$

(e) $a_1 := p, \qquad a_{n+1} = \sqrt{p^2 + a_n},$

(f) $a_1 := p, \qquad a_{n+1} = \sqrt{p^2 a_n},$

(g) $a_1 := 1, \qquad a_{n+1} = 1 + 1/a_n,$

(h) $a_1 := x, \qquad a_{n+1} = 2x + a_n^2,$

(i) $a_1 := x, \qquad a_{n+1} = a_n \dfrac{a_n^2 + 12}{3a_n^2 + 4},$

(j) $a_1 := x, \qquad a_{n+1} = \sin a_n,$

(k) $a_1 := p, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n},$

(l) $a_1 > 0$ tetszőleges, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{p}{a_n}\right),$

(m) $a_1 > 0$ tetsz., $a_{n+1} = \dfrac{1}{k+1}\left(k a_n + \dfrac{p}{a_n^k}\right),$

(n) $a_1 := 0, \quad a_1 := 1/2, \qquad a_{n+2} = \dfrac{1}{3}(1 + a_{n+1} + a_n^3),$

(o) $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, ahol $f_1 := f_2 := 1$ és $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

109. Bizonyítsa be, hogy az alábbi rekurzióval értelmezett $([a_n, b_n])$ intervallumsorozat tetszőleges pozitív számokból álló $(a, b)$ számpár esetén teljesíti a Cantor-féle közösponttétel feltételeit:

$$a_1 := \sqrt{ab}, \quad b_1 := \frac{a+b}{2}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

# 4. Végtelen sorok

110. Számítsa ki a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ sorösszeget, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n =$

(a) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,
(b) $\dfrac{2^{n-1}+3^{n-1}}{5^n}$,
(c) $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,
(d) $\dfrac{6}{9n^2+12n-5}$,
(e) $\dfrac{14}{49n^2-28n-45}$,
(f) $\dfrac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$,
(g) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,
(h) $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,
(i) $\dfrac{n^2-n}{n!}$,
(j) $5^{-2n-1}$,
(k) $\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,
(l) $\dfrac{1}{4n^2-1}$,
(m) $\dfrac{1+(-1)^n}{10^n}$,
(n) $\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}}$,
(o) $\sin\dfrac{n!\pi}{720}$,
(p) $\dfrac{2^n+(-3)^{n-1}}{6^{2n-1}}$,
(q) $\dfrac{n+4}{(n+2)^2-n-4}$,
(r) $\ln\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$,
(s) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$,
(t) $\ln\dfrac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}$,
(u) $\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$,
(v) $\dfrac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n^2+n}}$.

111. Tetszőleges $a$ és $b$ valós számok esetén számítsa ki az alábbi rekurzióval értelmezett sorozat határértékét: $a_1 := a$ , $a_2 := b$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+2} = (a_{n+1}+a_n)/2$.

112. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$. Bizonyítsa be, hogy ha mind a $\sum a_n$, mind a $\sum c_n$ végtelen sor konvergens, akkor a $\sum b_n$ végtelen sor is konvergens.

113. Bizonyítsa be, hogy ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor a $\sum a_n^2$ végtelen sor konvergens.

114. Bizonyítsa be, hogy ha a $\sum a_n^2$, $\sum b_n^2$ végtelen sorok konvergensek, akkor, akkor az alábbi végtelen sorok is konvergensek:

(a) $\sum a_n b_n$,
(b) $\sum (a_n+b_n)^2$,
(c) $\sum a_n/n$.

115. Adjon példát olyan $(a_n)$, $(b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim(a_n/b_n) = 1$, $\sum a_n$ konvergens és $\sum b_n$ divergens.

116. Bizonyítsa be, hogy ha az $(a_n/b_n)$ sorozat 1-hez tart és $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor a $\sum b_n$ végtelen sor is abszolút konvergens.

117. Legyen minden pozitív egész $n$-re $a_n$ az $n$-edik 4k-1 alakú prímszám reciproka. Bizonyítsa be, hogy a $\sum a_n^2$ végtelen sor konvergens.

118. Bizonyítsa be, hogy ha az $(na_n)$ sorozatnak van határértéke, és ez nullától különböző, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

119. Bizonyítsa be, hogy ha $(a_n)$ pozitív tagú monoton nullsorozat és $\sum a_n$ konvergens, akkor $(na_n)$ nullsorozat. (Útmutató: alkalmazza a Cauchy-féle konvergenciafeltételt!)

120. Konvergens-e a $\sum a_n$ végtelen sor, ha $a_n =$

(a) $\dfrac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$,

(b) $n\sin\dfrac{2+(-1)^n}{n^3}$,

(c) $\dfrac{\cos^2(n\pi/2)}{n(n+1)(n+2)}$,

(d) $\dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$,

(e) $\dfrac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$,

(f) $\dfrac{n(2/n+\cos n\pi)}{2n^2-1}$,

(g) $\dfrac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$,

(h) $\dfrac{n\cos^2 n}{n^3+5}$,

(i) $\dfrac{n\ln n}{n^2-3}$,

(j) $\dfrac{n^2+3}{n^3(2+\sin(n\pi/2))}$,

(k) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\dfrac{2+(-1)^n}{6}\pi$,

(l) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5}}\sin\dfrac{2+(-1)^n}{6}\pi$,

(m) $\dfrac{1}{n^2\ln(n+1)+1}$,

(n) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2n+1}}{n(3+\sin\frac{n\pi}{4})}$,

(o) $\dfrac{2\cos\frac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$,

(p) $\dfrac{2\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$,

(q) $\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$,

(r) $\dfrac{2}{5^{n-1}+n-1}$,

(s) $\dfrac{1}{n}\mathrm{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

(t) $\ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4}$,

(u) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{n}$,

(v) $\dfrac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$,

(w) $\dfrac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$,

(x) $\dfrac{3+7n}{5^n+n}$,

(y) $n(\sqrt[n]{e}-1)^2$,

(z) $n^2(\sqrt[n]{e}-1)^4$

121. Legyen $p>1$ valós szám, és minden pozitív egész $n$-re $x_n$ $p$-nél kisebb nemnegatív egész. Bizonyítsa be, hogy a $\sum x_n/p^n$ végtelen sor konvergens!

122. Bizonyítsa be, hogy ha $(x_n)$ olyan sorozat, melyre a $\sum |x_{n+1}-x_n|$ végtelen sor konvergens, akkor az $(x_n)$ sorozat is konvergens.

123. Adjon példát olyan pozitív tagú divergens $\sum a_n$, $\sum b_n$ végtelen sorokra, amelyekre a $\sum \min\{a_n, b_n\}$ végtelen sor konvergens!

124. Konvergens-e a $\sum a_n$ végtelen sor, ha $a_n =$

(a) $\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$,

(b) $\dfrac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$,

(c) $\dfrac{2\cdot 10^n\cdot n!}{(2n)!}$,

(d) $\dfrac{(2n+2)!}{(3n+5)2^n}$,

(e) $\dfrac{n+5}{n!}\sin\dfrac{2}{3^n}$,

(f) $\dfrac{n!}{(2n)!}\mathrm{tg}\dfrac{1}{5^n}$,

(g) $\dfrac{6^n(n^2-1)}{n!}$,

(h) $\dfrac{n^n}{(n!)^2}$,

(i) $\dfrac{(2n-1)!!}{3^n(n+1)!}$,

(j) $\dfrac{n!}{n^{n-1}}$,

(k) $\dfrac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$,

(l) $n!\sin\dfrac{\pi}{2^n}$,

(m) $\dfrac{2^n n!}{n^n}$,

(n) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{3k-1}$,

(o) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{3k-2}{2k+5}$,

(p) $\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$,

(q) $(1+\frac{1}{n})^{n^2}4^{-n}$,

(r) $n^4\left(\dfrac{2n}{3n+5}\right)^n$,

(s) $\left(\dfrac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$,

(t) $\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$,

(u) $\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$,

(v) $2^{n-1}e^{-n}$,

(w) $\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{3n}$,

(x) $(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}$,

(y) $(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$,

(z) $\cos(\pi\sqrt{n^2+n})$.